



CC BY-NC-SA
Attribuzione - Non Commerciale - Condividi allo Stesso Modo

Calcolo combinatorio 2015

prof Mezzini Luciano

1) ANAGRAMMI (con lettere non ripetute)

Calcola il numero degli anagrammi delle parole RE; TRE; ROMA; GIORNALE

RE : RE, ER $n^\circ = 2$

TRE: TRE, TER, RET, RTE, ETR, ERT $n^\circ = 6 = 3 \times 2 \times 1$

ROMA

1° lettera	2° lettera	3° lettera	4° lettera
4 scelte	3 scelte	2 scelte	1 scelta

$$= 4 \times 3 \times 2 \times 1 = !$$

GIORNALE $n^\circ = ..$

Se le lettere non ripetute sono n il n° degli ANAGRAMMI è: $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$

PERMUTAZIONI SEMPLICI

- Dati n elementi distinti si dicono permutazioni semplici di tali elementi tutti i possibili raggruppamenti formati in modo che ognuno contenga tutti gli elementi e differisca dagli altri per l'ordine secondo il quale gli elementi si susseguono.

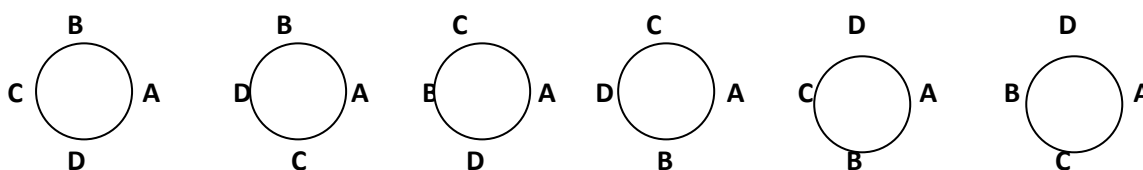
$$P_n = n(n-1)(n-2) \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Il fattoriale di un numero n è il prodotto di n numeri interi decrescenti a partire da n ($0! = 1$)

PERMUTAZIONI CIRCOLARI

In quanti modi 4 persone possono sedersi su una panca ? $4!$ Modi $= 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

In quanti modi 4 persone possono sedersi attorno ad un tavolo rotondo?



Per risolvere il problema basterà immaginare di tenere fissa una persona e di permutare le altre tre. Quindi $3! = 6$

In quanti modi 6 ragazzi possono sedersi attorno ad un tavolo rotondo? $5!$

$$P_c(n) = (n-1)!$$

2) ANAGRAMMI (con lettere ripetute)

Calcola il numero degli anagrammi delle parole ESSERE, ARA, PIPPO, MAMMA, MATEMATICA (quanti iniziano con MA)

Vogliamo calcolare il numero di anagrammi della parola ESSERE, in cui non tutte le lettere sono diverse.

Per ricondurre il problema al caso di permutazioni semplici poniamo degli indici alle tre E e alle 2 S, quindi si avrà $E_1 S_1 S_2 E_2 R E_3$.

Essendo tutti i simboli distinti il numero delle permutazioni dovrebbe essere $6! = 720$

Ma se consideriamo le due permutazioni $E_1 R E_2 S_1 S_2 E_3$ e $E_2 R E_3 S_2 S_1 E_1$ corrispondono al medesimo anagramma ERESSE.

In qualunque modo si permutino le tre E a condizione di mantenerle nella prima, terza e sesta posizione e le due S a condizione di mantenerle nella quarta e quinta casella si ottiene sempre ERESSE..

Il numero degli anagrammi distinti sarà quindi $\frac{720}{3!2!} = 60$

Quindi Se degli n oggetti k_1 sono fra loro identici, k_2 sono fra loro identici ... k_m fra loro identici

$$(k_1 + k_2 + \dots + k_m \leq n) \quad \text{si ha} \quad P_n^{(k_1; k_2; \dots; k_m)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}$$

3) La classe 1° A è composta di 7 studenti. Il prof di matematica deve scegliere un gruppetto 3 studenti da mandare ad una conferenza. In quanti modi può farlo?

Scriviamo in ordine gli studenti e di fianco indichiamo con una S uno studente che va alla conferenza e con N uno studente che non va alla conferenza. Avremo per esempio

Aldo	N
Barbara	S
Carlo	S
Dario	N
Ester	N
Franco	S
Gaia	N

Scrivendo le lettere S e N in sequenza orizzontale nello stesso ordine della lista corrisponde una parola di 7 lettere NSSNNSN. Anagrammando tale parola si ottengono tutti i modi con cui l'insegnante può mandare tre ragazzi alla conferenza

In quanti modi possiamo scegliere 5 alunni da un gruppo di 14?

Quanti terni si possono fare con 90 numeri

Quindi se dobbiamo scegliere k oggetti da un insieme di n ,utilizzando la formula per gli anagrammi il

numero cercato è $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Questi raggruppamenti si chiamano combinazioni semplici $C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} =$ i numeri $C_{n,k}$ si

chiamano coefficienti binomiali e si indicano con il simbolo $\binom{n}{k}$

Si chiama combinazione semplice di classe K di n elementi ($k \leq n$) un qualunque sottoinsieme di k elementi.

4) Un papà ha 4 figli e 10 caramelle identiche . In quanti modi diversi può distribuire le caramelle ai figli?

Mettiamo in fila le 10 caramelle

O O O O O O O O O O

Usando tre separatori formiamo 4 gruppi di caramelle

O/O O O/O O O O/O O che interpretiamo nel seguente modo:

1° figlio una caramella, 2° Figlio 3 caramelle, 3° figlio 4 caramelle, 4° Figlio 2 caramelle,

Mettendo i separatori in questo modo /O O O/ /O O O O O O O O avremo:

1° figlio 0 caramelle, 2° Figlio 3 caramelle, 3° figlio 0 caramelle, 2° Figlio 2 caramelle

Permutando le caramelle e i separatori otteniamo tutti i possibili raggruppamenti di caramelle per i 4 figli.

I modi diversi di distribuzione delle caramelle saranno $\frac{13!}{10!3!} = 286$

Più In generale, in quanti modi si possono distribuire n caramelle a k figli?

$$\binom{n+k-1}{n} = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$$

- Dispongo di palline di 4 colori diversi , in quanti modi diversi posso riempire un sacchetto con 10 palline.(di ciascun colore ho più di 10 palline)

Più in generale , quanti sarebbero stati i modi se i colori fossero stati p e il sacchetto fosse stato riempito con q palline?

$$\binom{q+p-1}{q}$$

In quanti modi diversi posso distribuire 12 penne indistinguibili in 5 cassetti di una scrivania? E se in ogni cassetto ci deve essere almeno una penna?

Quanti sono i diversi tipi di monomi di terzo grado che si possono formare con le lettere x e y ?

Qual è il numero massimo di termini che può comparire in un polinomio di 3° grado nelle 4 variabili x,y,z,t ?

$$\binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = C_{6,3} = C_{4,3}^r = 20$$

Le combinazioni con ripetizione di classe k sono i raggruppamenti che si possono fare con gli n elementi di un insieme in modo che ogni raggruppamento ne contenga k, che ogni elemento possa ripetersi fino a k volte e che ogni gruppo differisca dall'altro per almeno un elemento.

- 5) In quanti modi in una gara fra 10 concorrenti possono essere assegnati il primo, il secondo e il terzo premio?

1° classificato	2° classificato	3° classificato	
10 scelte	9 scelte	8 scelte	

$$D_{10,3} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

Nel campionato italiano di calcio a 20 squadre, quanti incontri si disputano?

Si hanno 5 bandiere di colori diversi: quanti diversi segnali si possono fare usando contemporaneamente 3 bandiere?

DISPOSIZIONI SEMPLICI

- Dati n elementi distinti si dicono disposizioni semplici di classe k ($k < n$) tutti raggruppamenti che si possono formare con gli n elementi dati, in modo che ogni raggruppamento ne contenga k, che due raggruppamenti differiscano per qualche elemento o per l'ordine
- Il numero delle disposizioni di classe k di n elementi è uguale al prodotto di k numeri interi decrescenti a partire da n
- $D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$
-

- 6) Quante colonne bisogna giocare al totocalcio per essere sicuri di fare 14

1° elemento	2° elemento	3° elemento		14-esimo elemento
3 scelte possibili	3 scelte possibili	3 scelte possibili		14 scelte possibili

$$D'_{3,14} = 3^{14} =$$

Quanti sono i possibili numeri di 5 cifre?

DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE

- Dati n elementi distinti, si chiamano disposizioni con ripetizione di classe k, tutti i raggruppamenti che si possono fare con gli n elementi dati, in modo tale che ogni gruppo ne contenga k, che ogni elemento possa ripetersi fino a k volte e che ogni gruppo differisca dall'altro o per un elemento o per l'ordine, $D^r_{n,k} = n^k$

- **NB** E' molto importante notare che può essere anche $k > n$. la possibilità della ripetizione rende inoperante l'ovvia condizione $k \leq n$ enunciata per le disposizioni semplici.
- $D'_{n,1} = n^1$ $D'_{n,2} = n^2$
-

Applicazioni importanti

- In quanti modi posso mettere in fila 3 palline bianche e 5 nere?
- Quante sono le quaterne a,b,c,d di numeri interi non negativi che soddisfano l'equazione $a+b+c+d=7$?
- In un gruppo di 10 persone ,ciascuno stringe la mano a ogni altra persona esattamente una volta, quante sono le strette di mano?
- In una tabella 5x8, una pulce che inizialmente è nella casella in basso a sinistra vuole andare in alto a destra. Essa può fare due tipi di salto: andare nella casella sopra in alto oppure a fianco a destra. Quanti percorsi può fare?
- Data una scacchiera 5x5, trovare i percorsi che vanno da due vertici opposti senza passare per quello centrale.
$$\binom{8}{4} - \binom{4}{2}\binom{4}{2}$$
- In quanti modi diversi posso distribuire al più 5 caramelle a tre bimbi?
- Quante sono le funzioni strettamente crescenti da $A = \{1,2,3\} \rightarrow B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$?
- In quanti modi diversi si possono mettere 2 palline in quattro urne?

Esercitazione 1

- Determinare quanti numeri di tre cifre, fra loro diversi e le cui cifre non si ripetano, si possono formare con i numeri 3,5 e 7. **6**
- Quanti sono i numeri di tre cifre che si possono formare con le 9 cifre significative? **729**
- In una corsa " tris " partono 10 cavalli. Quanti sono i possibili ordini di arrivo nelle prime tre posizioni?. **720**
- Determinare il numero di quaterne che si possono formare con i 90 numeri del lotto. **2.555.190**
- Quante sono le cinquine che contengono un determinato ambo? Un determinato terno? Una determinata quaterna? **109.736 3741 86**
- Qual è la probabilità di fare un terno giocando tre numeri? **1/11748**
- Ci sono sette macchine da corsa. Ammettendo che gareggiando nessuna di esse si ritiri dalla corsa , in quanti possibili ordini di arrivo possono piazzarsi le macchine? **5040**
- Sapendo che ad un torneo calcistico partecipano 20 squadre, determinare quanti sono gli incontri che verranno disputati fra il primo e il secondo girone. **380**
- Una partita di calcio tra la squadra A e la squadra B è terminata 4 a 3 a favore della squadra A . In quanti modi diversi possono essersi succedute le reti? **35**
- In quanti modi si possono mettere in fila 3 Italiani, 4 Francesi, 4 inglesi e 2 Olandesi in modo che quelli della stessa nazionalità siano uno di seguito all'altro. Risolvere lo stesso

problema nel caso debbano sedersi a una tavola rotonda.

165.888 41.472

- 11) Quante linee d'attacco di 5 giocatori ciascuna si possono formare con 8 calciatori? E tenendo ferma l'ala destra? **6720 840**
- 12) Quanti sono i numeri di quattro cifre, divisibili per 5, inferiori a 5000 e non contenenti cifre diverse da 2,3,4,5? **48**
- 13) In quanti modi diversi si possono distribuire 7 cioccolatini indistinguibili a 4 bambini diversi? **120**
- 14) Se ogni bambino deve ricevere almeno un cioccolatino? **20**
- 15) Quattro giocatori si affrontano in una partita a carte sapendo che il numero complessivo di punti in palio è 11 calcolare i possibili esiti

della partita

364

Esercitazione 2

- 1) In quanti modi diversi possono sedersi 6 persone nei 6 posti di uno scompartimento ferroviario? (720)
- 2) Quanti terni si possono fare con 5 numeri? (10)
- 3) Quante sono le parole (anche prive di senso) che si possono ottenere utilizzando tre lettere della parola AROMI? (60)
- 4) Un cartolaio vuole esporre in vetrina 5 calcolatrici scientifiche scelte fra 12 modelli che ha in negozio. In quanti modi può effettuare la scelta? (792)
- 5) Dodici amici, dopo aver partecipato ad una cena, si salutano e ognuno stringe la mano a tutti gli altri. Quante sono le strette di mano? (66)
- 6) Tra tutti i numeri di 6 cifre, tutte diverse tra loro quanti sono quelli le cui prime tre cifre sono dispari e le restanti pari? (3600)
- 7) Tra tutti i numeri di 10 cifre tutte diverse tra loro, quanti sono quelli le cui prime cinque cifre sono dispari? Quanti sono i multipli di 10? e 100? (14400), (362880), nessuno.
- 8) Quanti anagrammi si possono fare con la parola GIORNALE? quanti di essi incominciano con NI? (40320) (720)
- 9) In un autobus vi sono 12 posti numerati. In quanti modi 5 persone possono occuparli? (95040)
- 10) Si mescolano 10 carte e si distribuiscono 5 al giocatore A e 5 al giocatore B. In quanti modi diversi può avvenire la distribuzione? (252)
- 11) Tre coppie di amici vanno a cenare in un ristorante. Viene assegnato un tavolo a sei posti. In quanti modi si possono disporre se si vuole che le tre donne si siedano tutte al lato del tavolo più vicino al muro e gli uomini sul lato opposto? (36)
- 12) In quanti modi 20 studenti possono disporsi in fila tenendo presente che Luca e Andrea avendo litigato non vogliono stare vicini? $20! - 2 \times 19 \times 18! = 20! - 2 \times 19! = 18 \times 19!$
- 13) In quanti modi 12 studenti possono sedersi attorno ad un tavolo rotondo tenendo presente che Luca e Andrea avendo litigato non vogliono stare vicini? $9 \times 10!$
- 14) In una classe di 30 studenti
 - .In quanti modi posso scegliere un gruppo che farà una gita?
 - .In quanti modi posso formare un gruppo di 7 studenti?
 - .In quanti modi posso scegliere 7 studenti per la gara a squadre e 10 per la gara del pubblico (13 stanno a casa)? $2^{30}; \binom{30}{7} \binom{30}{7} \binom{23}{10}$

Esercitazione 3

1. Quante sono le colonne al totocalcio con 5 segni 1, 2 segni X e 7 segni due? $\frac{14!}{5!7!2!}$
2. In quanti modi diversi si possono distribuire 12 penne a sfera nei cinque scomparti di un porta penne? E se in ogni scomparto deve essere presente almeno una penna? 1820 330
3. Una fabbrica di vernici produce confezioni di vernici da un litro, ottenute miscelando dieci misurini da un decilitro di “rosso”, di “giallo” o di “blu”.
Quanti tipi di vernice si possono realizzare? 66
4. Quante sono le soluzioni naturali dell'equazione $x+y+z=33$? 595
5. Si devono disporre su una fila di dieci sedie cinque coppie uomo-donna, in quanti modi la cosa si può fare se la disposizione è fatta alla rinfusa? E se le donne e gli uomini devono rimanere vicini fra di loro? E se gli uomini devono sedere assieme? $10! \quad 2*5!*5! \quad 6*5!*5!$
6. Determinare quanti sono gli anagrammi della parola STAGISTI in cui non ci sono vocali tra la prima e l'ultima consonante. Stage senior Pisa 2006 360
7. Quante sono le terne ordinate di numeri interi positivi distinti da 1 tali che $abc = 7^{39}$?
Trieste 15/2/06 703
8. Le magliette dei giocatori di una squadra di calcio sono numerate da 1 a 11. Qual è la probabilità che scegliendo a caso 6 giocatori la somma dei numeri delle loro magliette sia dispari? Trieste 15/2/06 Dare come risultato la somma del numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini 349
9. In un torneo di tennis, 8 persone decidono di giocare degli incontri di doppio in tutti i modi possibili. Quanti incontri ci sono nel torneo? Trieste.8/3/06 210
10. Un'aiuola ornamentale può contenere 20 vasi di piante. Un giardiniere ha a disposizione 5 vasi di viole, 3 vasi di primule, e 12 vasi di giacinti .In quanti modi diversi può disporre i fiori nell'aiuola.(la risposta deve essere la somma delle cifre del numero trovato.) Trieste 26/2/07 21
11. Quante parole distinte che iniziano e finiscono con una vocale si possono ottenere anagrammando la parola TRIESTE ? Trieste 7/2/07 180
12. Calcolare la probabilità di ottenere la parola TAVOLETTA scrivendo in ordine casuale in 9 caselle consecutive le nove lettere AAELOTTTV. Ridurre la frazione trovata ai minimi termini e scrivere come rispostala decima parte del denominatore.

Partizione di un intero

In quanti modi si può scrivere un numero naturale non nullo k come somma di n numeri non negativi? Si considerano diverse due rappresentazioni che differiscono per l'ordine degli addendi.

$$\binom{n+k-1}{n-1}$$

Scrivere il numero 5 come somma di 2 addendi $\binom{5+2-1}{2-1} = 6$

5+0, 4+1, 3+2, 2+3, 1+4, 0+5

Più semplicemente la risoluzione del problema è equivalente a trovare il numero delle soluzioni intere non negative dell'equazione $x+y=5$

In quanti modi possiamo scrivere il numero naturale non nullo k come somma di n numeri naturali non nulli? si considerano differenti due rappresentazioni che differiscono per l'ordine degli

addendi. $\binom{k-1}{n-1}$

Per esempio il numero 5 si può scrivere in $\binom{5-1}{2-1} = 4$ modi 1+4, 2+3, 3+2, 4+1

Più semplicemente la risoluzione del problema è equivalente a trovare il numero delle soluzioni intere positive dell'equazione $x+y=5$

Decomposizione

Si chiamano *decomposizioni* di un numero i diversi modi nei quali può essere scritto come somma di uno o più interi positivi, tenendo conto dell'ordine degli addendi. Ad esempio per il numero 3 ci sono queste possibilità:

1+1+1

1+2

2+1

3

Quante sono le decomposizioni del numero 6?

Prendiamo una sequenza di 6 palline ●●●●●● ed inseriamo dei separatori. La sequenza

●/●●/●●● corrisponde a 1+2+3. Gli spazi ove mettere i separatori sono 5. Per ogni spazio posso decidere se mettere o non mettere un separatore. Le scelte possibili sono $2^5=32$. Per ogni scelta ho una decomposizione. $R = 32$

LO SCHEMA LOGICO DELLE BUCHE

A volte, la determinazione dei gruppi che si possono formare in base ad una certa legge può essere effettuato agevolmente secondo lo schema logico seguente: si pensa a buche che devono essere riempite con gli elementi dati secondo quanto stabilito dalla legge prefissata.

Es: Determinare quanti numeri di tre cifre, fra loro diversi e le cui cifre non si ripetano, si possono formare con i numeri 4,5 e 6.

$$\begin{array}{ccc} () & () & () \\ (3) & (2) & (1) \\ 3*2*1 = 6 \end{array}$$

Determinare quanti sono i numeri di tre cifre fra loro tutte diverse.

$$\begin{array}{ccc} () & () & () \\ (9) & (9) & (8) \\ 9*9*8=648 \end{array}$$

Ripetiamo l'esercizio precedente nell'ipotesi in cui sono possibili le ripetizioni

$$\begin{array}{ccc} () & () & () \\ (9) & (10) & (10) \\ 9*10*10=900 \end{array}$$

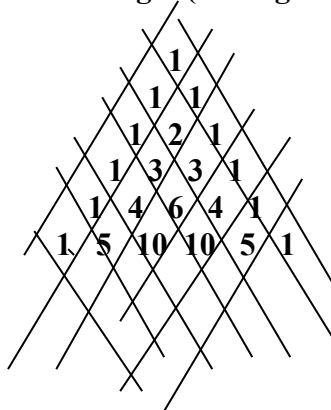
Principio di moltiplicazione delle scelte:

Un menù al ristorante prevede 5 Antipasti, 4 Primi, 3 Secondi e 2 Dessert. In quanti modi si può pranzare ordinando un piatto per tipo?

$$|A \times P \times S \times D| = 5*4*3*2 = 120$$

Se una scelta può essere compiuta in n modi diversi e per ciascuno di essi, una seconda scelta può essere compiuta in m modi diversi allora la successione delle due scelte può essere effettuata in nm modi distinti

Triangolo di Tartaglia(Triangolo di Pascal)



La somma dei termini della ennesima riga è sempre $= 2^n$

$$\begin{array}{c} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\ \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\ \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \end{array}$$

Binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \text{ dividi n. e d. per (n-k)! } \text{ Legge dei tre fattoriali}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \text{ legge delle classi complementari}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \text{ legge di Stifel}$$

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1} \text{ legge di ricorrenza}$$

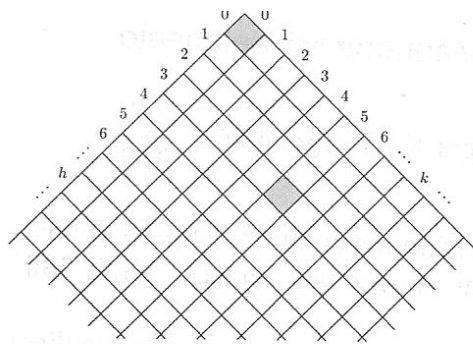


figura 1

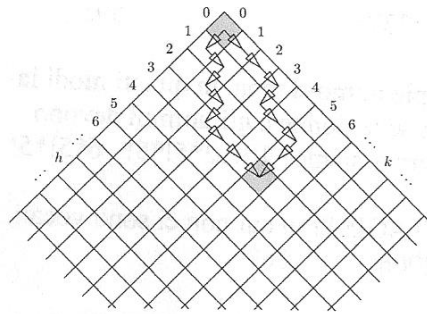


figura 2

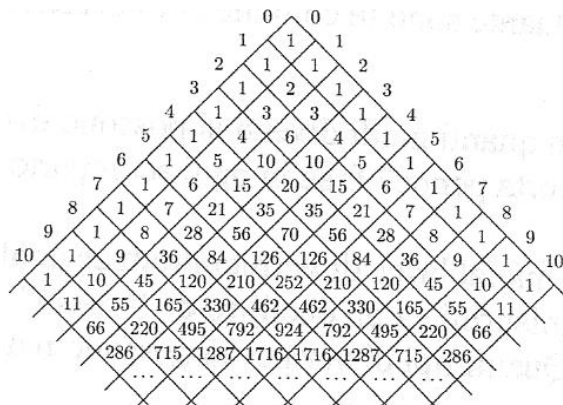


figura 3

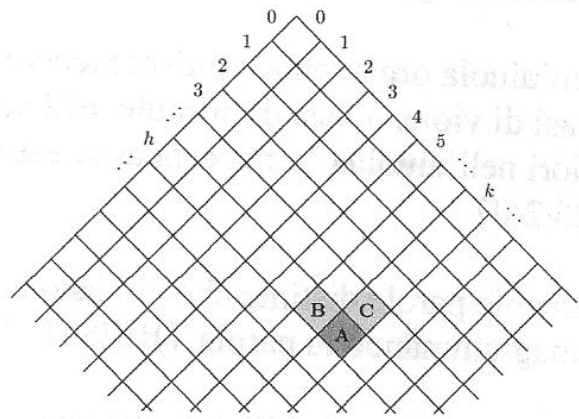


figura 4

1) Si consideri la seguente scacchiera infinita (fig 1) . una pulce partendo dalla casella (0,0) vuole raggiungere la casella (3,5) facendo solo 2 tipi di salto: spostarsi in quella adiacente in basso a destra o in basso a sinistra. (fig.2). Quanti sono i diversi percorsi che può fare?

Se conveniamo di scrivere **D** per ogni passo in basso a destra e **S** per ogni passo in basso a sinistra i due percorsi della figura 2 sono rappresentati dalle parole

SDSDSDD DDDSDSS

Per calcolare tutti i possibili percorsi basterà calcolare il numero di permutazioni di una delle due parole ,che sappiamo essere $\frac{8!}{3!5!} = 56$

Se vogliamo andare da (0,0) ad una casella (h,k) tutti i possibili percorsi saranno $\frac{(h+k)!}{h!k!}$

Si immagini di scrivere un numero intero in ciascuna delle caselle di una scacchiera infinita rispettando queste regole:

1. In tutte le caselle del bordo scriviamo 1
2. In ogni casella che non sia sul bordo scriviamo un numero ottenuto sommando il numero della casella in alto a destra con il numero della casella contigua in alto a sinistra.

Tale configurazione di numeri prende il nome di triangolo di Pascal o triangolo di Tartaglia. Trovare una formula che permetta di calcolare il numero che sta nella casella di coordinate (h,k) senza bisogno di dover calcolare i numeri di tutte le caselle che stanno sopra.

La fig 3 ci fornisce un esempio di come viene riempita.

Nel problema precedente abbiamo visto che tutti i possibili percorsi che vanno dalla casella (0,0) alla casella (3,5) sono 56 e nella casella (3,5) troviamo proprio 56. Nella casella (9,4) troviamo il numero 715 che rappresenta il numero di percorsi che vanno da (0,0) a (9,4).

Essendo il numero di percorsi che vanno in A (Fig 4) la somma dei percorsi che vanno in B e C si può affermare che il numero che sta nella casella (h,k) è $\frac{(h+k)!}{h!k!}$

E' possibile calcolare la somma dei primi n numeri di una riga (n° che sono compresi fra due rette parallele

$1+4+10+20+35+56+84+120 =$ somma dei primi 8 numeri della riga 3 il risultato 330 si trova nella casella di coordinate (7,4) in basso a destra del numero 120. Quindi la somma dei primi n numeri della riga k si trova nella casella di coordinate (n-1, k+1)

COEFFICIENTI MULTINOMIALI

Esaminiamo questo problema : *Si devono distribuire n oggetti distinti in r scatole distinte, in modo che ciascuna di esse contenga, nell'ordine $n_1, n_2, \dots, n_r$ oggetti, dove $\sum_{i=1}^r n_i = n$. In quanti modi si può effettuare questa suddivisione?*

Vi sono $\binom{n}{n_1}$ possibili scelte per gli oggetti della prima scatola; per ogni tale scelta vi sono $\binom{n-n_1}{n_2}$ possibili scelte per gli oggetti della seconda scatola; per ogni scelta effettuata nelle prime due scatole vi sono $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ scelte possibili per gli oggetti della terza scatola; e così via. Quindi vi sono:

$$\binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \dots \binom{n-n_1-\dots-n_{r-1}}{n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!} \text{ suddivisioni possibili}$$

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!} \quad \text{con} \quad n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$$

In una stazione di polizia vi sono 10 poliziotti. Se 5 di essi devono pattugliare le strade, 2 di essi devono restare nella stazione e gli altri tre di riserva, in quanti modi si possono assegnare i 3 compiti ai poliziotti?

$$S = \frac{10!}{5!2!3!} = 2520 \text{ modi possibili di assegnare}$$

Calcolare

$$(x+y+z)^2 = \binom{2}{2,0,0}x^2y^0z^0 + \binom{2}{0,2,0}x^0y^2z^0 + \binom{2}{0,0,2}x^0y^0z^2 + \binom{2}{1,1,0}xyz^0 + \binom{2}{1,0,1}xy^0z + \binom{2}{0,1,1}x^0yz =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

Nello sviluppo di $(a+b+c+d)^7$ il coefficiente di $a^2b^3cd = \frac{7!}{2!3!1!1!} = 420$ Il numero totale dei termini di questo sviluppo è $C_{4,7}^r = \frac{10!}{7!3!} = 120$

Applicazioni

- 1) Calcola le ultime due cifre di 41^{99} 61
- 2) Calcola le ultime due cifre di 89^{95} 49
- 3) Calcola le ultime due cifre di 93^{64} 01
- 4) Trova il coefficiente di x^{16} nell'espressione $(x^2 - 2x)^{10}$ 3360
- 5) Trova il termine quattordicesimo in $(2-b)^{15}$ $-460b^{13}$
- 6) 20 persone si suddividono in 5 gruppi di 4 persone; ogni gruppo fa il girotondo. In quanti modi è possibile organizzare questo insieme di girotondi?
- 7) Quanti sono i quadrati perfetti nell'intervallo fra 100.000 e 500.000 391

CONTEGGI

• Divisori di un numero

Quanti sono i divisori positivi di 4000?

$$4000 = 4 \cdot 1000 = 4 \cdot 10^3 = 2^2 \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2^5 \cdot 5^3$$

Un divisore sarà del tipo $2^a \cdot 5^b$ $0 \leq a \leq 5$ 6 possibilità $0 \leq b \leq 3$ 4 possibilità

$$\text{N° divisori di } 4000 = 6 \cdot 4 = 24$$

Più in generale se $N = P_1^{a_1} \cdot P_2^{a_2} \cdot \dots \cdot P_k^{a_k}$ **il n° dei suoi divisori è** $(a_1+1)(a_2+1) \cdot \dots \cdot (a_k+1)$

Nb: Un intero ha un numero dispari di divisori se e solo se è un quadrato perfetto

Qual è la max potenza di 2 che divide 2006!

$$2006! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 2006$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
	x		x		x		x		x		x		x		x	
			x				x				x				x	
							x								x	
																x

Nella prima riga ho 2006/2 caselle

Nella seconda riga ho 2006/4 caselle

Nella terza riga ho 2006/8 caselle

La max potenza che divide 2006! è $= \left\lfloor \frac{2006}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2006}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2006}{8} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{2006}{1024} \right\rfloor =$

$\left\lfloor \right\rfloor$ = parte intera

Con quanti zeri termina 2006! (devo sapere il numero dei fattori 5 e 2)

$$\left\lfloor \frac{2006}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2006}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2006}{125} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2006}{625} \right\rfloor =$$

1) Trova i valori interi di n per cui

$$\frac{2006}{n-5}, \frac{n+1}{n-5}, \frac{n^2+1}{n-5} \text{ risulta a sua volta intero}$$

A) n-5 deve essere un divisore di 2006; $2006 = 2 \cdot 17 \cdot 59$

i divisori sono 8 : 1, 2, 17, 59, $2 \cdot 17$, $2 \cdot 59$, $17 \cdot 59$, 2006

n-5=1 n-5=2 n-5=17 n-5=59 n-5=34 n-5=108 n-5=1003 n-5=2006

n-5=-1 n-5=-2 n-5=-17 n-5=-59 n-5=-34 n-5=-108 n-5=-1003
n-5=-2006

$$B) \frac{n+1}{n-5} = \frac{n-5+6}{n-5} = 1 + \frac{6}{n-5} \quad n-5 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

$$C) \frac{n^2+1}{n-5} = n+5 + \frac{26}{n-5} \quad n-5 = \pm 1, \pm 2, \pm 13, \pm 26$$

2) Trovare le coppie (x,y) di numeri interi che risolvono le seguenti equazioni.

$$a) x^2 - y^2 = 2007, \quad b) x^2 - y^2 = 2006, \quad c) x^2 - y^2 = 2008, \quad d) x^2 - y^2 = k,$$

$$a) (x+y)(x-y) = 2007 \quad \text{divisori } 2007: \pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 223, \pm 3 \cdot 223, \pm 9 \cdot 223$$

$$\text{Devo risolvere 12 sistemi } \begin{cases} x+y=2007 \\ x-y=1 \end{cases} \dots\dots\dots$$

$$\text{Se ho } \begin{cases} x+y=A \\ x-y=B \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{A+B}{2} \\ y = \frac{A-B}{2} \end{cases}$$

che ha soluzione in Z se A e B sono entrambi pari o entrambi dispari
 $x^2 - y^2 = k$, ha soluzione se k dispari o multiplo di 4

N° triangolari

N° triangolari : Si definisce n – esimo **numero triangolare** il numero che si ottiene sommando tutti i numeri interi tra 1 ed n

Più precisamente se indichiamo con T_n l'ennesimo numero triangolare si ha:

$$\begin{array}{rcll}
 T_1 & = & 1 & \text{X} \\
 T_2 & = & 1+2 = T_1+2 = 3 & \text{X} \quad \text{XX} \\
 T_3 & = & 1+2+3 = T_2+3 = 6 & \text{X} \quad \text{XX} \quad \text{XXX} \\
 T_4 & = & 1+2+3+4 = T_3+4 = 10 & \text{X} \quad \text{XX} \quad \text{XXX} \quad \text{XX XX} \\
 \dots\dots\dots & & T_1 = 1 & T_2 = 3 \quad T_3 = 6 \quad T_4 = 10 \\
 T_n & = & T_{n-1} + n &
 \end{array}$$

- 1) Calcolare la somma di $1+2+3+\dots+99+100=$
- 2) Determina la formula per trovare la somma di n numeri $= n(n+1)/2$
- 3) Calcola la somma dei primi n numeri dispari (n^2)
- 4) Calcola $T_{100} = n^\circ$ dei percorsi che da (0,0) vanno (99, 2)
- 5) Determina la formula per trovare l'ennesimo n° triangolare $= N^\circ$ di percorsi che partono da (0,0) e arrivano a (n-1;2) $T_n = \frac{n(n+1)}{2} (1+2+3..+n)$
- 6) Determina $t_{50} = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + \dots + T_{50} = 1+3+6+\dots+1275 = N^\circ$ dei percorsi che vanno da (0,0) a (49,3) $= \binom{52}{3} = 22100$
- 7) Determina la formula per trovare $t_n = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n = N^\circ$ percorsi che partono da (0,0) e arrivano a (n-1, 3) $= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 1+3+6+10+\dots$ (**Numeri tetraedrici**)=
somma di numeri triangolari

Numeri quadrati. $1, 4, 9, \dots, n^2$

La somma di due numeri triangolari consecutivi è un numero quadrato

- 8) Calcola $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$
- 9) Determina la formula per determinare $SQ_n = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n = t_n + t_{n-1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$ **Somma di numeri quadrati.**
- 10) Una piramide costruita con cubetti è costruita da 25 strati quadrati. Lo strato della base ha il lato di 25 cubetti. Quello immediatamente sopra ha il lato di 24 cubetti, e così via fino al venticinquesimo strato che costituito da un solo cubetto. Quanti cubetti sono serviti per costruire la piramide? $5525 = t_{25} + t_{24} = \binom{27}{3} + \binom{26}{3}$
- 11) Su di un piano sono state tracciate 100 rette. Qual è il massimo numero di regioni ,contando sia quelle limitate che illimitate,in cui il piano può essere stato diviso.
- 12) Calcola $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (T_n)^2$

Principio di Inclusione- Esclusione

In una classe di 30 studenti tutti suonano almeno uno strumento. 20 suonano il piano e 16 la chitarra. Quanti suonano tutti e due gli strumenti?

$$\begin{aligned} 30 \text{ studenti} &= \text{st}(\text{piano}) + \text{st}(\text{chitarra}) - \text{st}(\text{piano} + \text{chitarra}) \\ 30 &= 20 + 16 - x \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Siano A e B due insiemi finiti di ordine m ed n e sia k l'ordine di $A \cap B$, allora

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = m + n - k$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

In un gruppo di amici, 8 hanno visto il film X, 12 il film Y e 9 il film Z. inoltre 6 hanno visto XeY, 4XeZ, 7YeZ e 2 soltanto hanno assistito a tutte e tre le proiezioni.

Da quante persone è formato il gruppo?

Abbiamo $|X| = 8, |Y| = 12, |Z| = 9, |X \cap Y| = 6, |X \cap Z| = 4, |Y \cap Z| = 7, |X \cap Y \cap Z| = 2$

quindi

$$|A \cup B \cup C| = 8 + 12 + 9 - 6 - 4 - 7 + 2 = 14$$

Siano $A_1, A_2, \dots, A_n$ n insiemi finiti di ordine finito. Si ha

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_1^n |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n|$$

Si hanno 4 buste già indirizzate e 4 lettere . Qual è la probabilità che imbustando a caso nessuno riceva la sua lettera?

Denominatore : tutti modi di imbustare = 4!

Numeratore : tutti i modi di imbustare sbagliando sempre.

Indichiamo :

1 2 3 4 Buste indirizzate

A B C D lettere

M_A = Il numero dei modi di imbustare che mandano la lettera giusta ad A =3!

M_B = Il numero dei modi di imbustare che mandano la lettera giusta ad B =3!

M_C = Il numero dei modi di imbustare che mandano la lettera giusta ad C =3!

M_D = Il numero dei modi di imbustare che mandano la lettera giusta ad D =3!

N° modi di imbustare che mandano una lettera giusta = 24

$M_A \cap M_B$ Il numero dei modi di imbustare che mandano la lettera giusta ad A e B =2!

$M_A \cap M_C$ Il numero dei modi di imbustare che mandano la lettera giusta ad A e C =2!

$M_C \cap M_B$ Il numero dei modi di imbustare che mandano la lettera giusta ad C e B =2!

.....

N° modi di imbustare che mandano due lettera giuste = 12

$M_A \cap M_B \cap M_C$ Il numero dei modi di imbustare che mandano la lettera giusta ad A, B, C = 1

.....

N° modi di imbustare che mandano tre lettera giuste = 4

$M_A \cap M_B \cap M_C \cap M_D$ Il numero dei modi di imbustare che mandano la lettera giusta ad A, B, C, D = 1

N° modi di imbustare che mandano quattro lettere giuste = 1

Dobbiamo togliere da 4! $|M_A \cup M_B \cup M_C \cup M_D|$

$|M_A \cup M_B \cup M_C \cup M_D| =$

$|M_A| + |M_B| + |M_C| + |M_D| - (|M_A \cap M_B| + |M_A \cap M_C| + \dots) + (|M_A \cap M_B \cap M_C| + \dots) - |M_A + M_B + M_C + M_D| =$
 $24 - 12 + 4 - 1 = 15$

$4! - |M_A \cup M_B \cup M_C \cup M_D| = 24 - 15 = 9$ prob = $9/24 = 3/8$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_1^n |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n|$$

$$= (n(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - \dots + (-1)^{n-1}) = n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \dots + (-1)^{n-1}$$

DISMUTAZIONI

In combinatoria , si dicono dismutazioni di un insieme finito di n elementi le permutazioni di tale insieme che non fissano alcun elemento.

Consideriamo adesso l'insieme costituito dalle lettere A,B,C,D . Quante parole si possono formare utilizzando una sola volta tutte le 4 lettere e non lasciando ciascuna lettera al suo posto iniziale?

ABCD ABDC ADBC ADCB ACDB ACBD
BADC BACD BDAC BDCA BCDA BCAD
DABC DACB DBCA DBAR DCAB DCBA
CABD CADB CABD CBDA CDAB CDBA

Troviamo che ci sono esattamente **9 dismutazioni** in un insieme di **4** elementi.

Il numero delle dismutazioni in un insieme di n elementi differenti è esattamente !n
Che si legge n subfattoriale .

$$!n = n! - \left(n! - \frac{n!}{2} + \frac{n!}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \right) = n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \right)$$

per $n=2$ si ha $!2 = 2! \left(\frac{1}{2} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} \right) = 1$ si scambia il primo con il secondo

per $n=3$ si ha $!3 = 3! \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) = 6 \left(\frac{2}{6} \right) = 2$

per $n=4$ si ha $!4 = 4! \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right) = 24 \left(\frac{9}{24} \right) = 9$

Connesso al problema del numero di dismutazioni di un insieme di n elementi differenti è il **problema del menage** detto **anche problema delle coppie sposate**
Il problema si presenta in questi termini:

In quanti modi è possibile far sedere attorno ad un tavolo rotondo n coppie sposate in modo che le donne e gli uomini siano alternati e nessun uomo sia seduto vicino a sua moglie.

Il problema, **posto nel 1891 da Lucas**, fu risolto da **Kaplansky solo nel 1943**

$$M_n = \sum_{k=0}^n \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)! (-1)^k$$

I numeri M_n si chiamano numeri del menage

$$M_2 = 0 \quad M_3 = 1 \quad M_4 = 2 \quad M_5 = 13 \quad M_6 = 80 \quad M_7 = 579 \quad M_8 = 0$$

CALCOLO COMBINATORIO APPLICATO AL LOTTO E SUPERENALOTTO

1) Qual è la probabilità di azzeccare l' " estratto semplice" ?

$$\text{Casi favorevoli} = \binom{89}{4} \quad \text{Casi possibili} = \binom{90}{5} \quad p = \frac{\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{18}$$

Vincita= 11,232 volte la posta giocata

2) Qual è la probabilità di azzeccare l' " ambo" ?

$$\text{Casi favorevoli} = \binom{88}{3} \quad \text{Casi possibili} = \binom{90}{5} \quad p = 2/801$$

Vincita= 250 volte la posta giocata

3) Qual è la probabilità di azzeccare il “ terno” ?

$$\text{Casi favorevoli} = \binom{87}{2} \quad \text{Casi possibili} = \binom{90}{5} \quad p = 1/11748$$

Vincita= 4250 volte la posta giocata

4) Qual è la probabilità di azzeccare la “ quaterna” ?

$$\text{Casi favorevoli} = \binom{86}{1} \quad \text{Casi possibili} = \binom{90}{5} \quad p = 1/511038$$

Vincita= 80.000 volte la posta giocata

5) Qual è la probabilità di azzeccare la “ cinquina” ?

$$\text{Lotto} = \text{gioco iniquo!} \quad \text{Casi favorevoli} = 1 \quad \text{Casi possibili} = \binom{90}{5} \quad p = 1/43.949.268$$

Vincita= 1.000.000 volte la posta giocata

6) Qual è la probabilità di fare 6 al superenalotto ?

$$\frac{1}{\binom{90}{6}} = \frac{1}{622.614.630}$$

7) Qual è la probabilità di fare 5+1 al superenalotto ?

$$\text{Casi favorevoli} = 6 \quad \text{Casi possibili} = \binom{90}{6} \quad p = 1/10.376.910$$

8) Qual è la probabilità di fare 5 al superenalotto?

$$\text{Casi favorevoli} = 6 * 84 \quad \text{Casi possibili} = \binom{90}{6} \quad p = 0,0000008$$

9) Qual è la probabilità di fare 4 al superenalotto?

$$\text{Casi favorevoli} = \binom{6}{4} \times \binom{84}{2} \quad \text{Casi possibili} = \binom{90}{6} \quad p = 0,00008398$$

Qual è la probabilità di fare 3 al superenalotto?

$$\text{Casi favorevoli} = \binom{6}{3} \times \binom{84}{3} \quad \text{Casi possibili} = \binom{90}{6} \quad p = 0,003$$

- **Diagonali di un poligono**

Un poligono di n lati ha $n(n-3)/2$ diagonali $n(n-1)/2 - n = n(n-3)/2$

Un poligono regolare ha n lati e 4n diagonali. Quanto vale n?

11

- **Prodotto cartesiano**

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Un menù al ristorante prevede 5 Antipasti, 4 Primi, 3 Secondi e 2 Dessert. In quanti modi si può pranzare ordinando un piatto per tipo?

$$|A \times P \times S \times D| = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$$

- **Insieme delle parti**

$$|P(A)| = 2^a \text{ a è il numero degli elementi di A}$$

Data una classe di 30 persone, in quanti modi posso scegliere un gruppo per fare una gita? (ogni ragazzo può essere o non essere scelto)

$$2^{30}$$

9*• **Insieme delle corrispondenze (=relazioni)**

Le corrispondenze tra un insieme A di ordine n e uno B di ordine k sono 2^{kn} , tante quante i sottoinsiemi di A per quelli di B ($|AXB| = kn$)

- **Insieme delle funzioni**

$$|\{f: [f: A \rightarrow B]\}| = k^n \text{ (n ed k sono il numero degli elementi di A ed B)}$$

Per l'immagine del primo elemento ho n scelte, tante quanti sono gli elementi del codominio. Avrò quindi $k \cdot k \cdot k \dots$ n volte quindi k^n

Siano $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{0, 1\}$ le applicazioni tra A e B sono:

$$f_1 = \begin{cases} a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 0 \\ c \rightarrow 0 \end{cases} \quad f_2 = \begin{cases} a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 0 \\ c \rightarrow 1 \end{cases} \quad f_3 = \begin{cases} a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 1 \\ c \rightarrow 0 \end{cases} \quad f_4 = \begin{cases} a \rightarrow 1 \\ b \rightarrow 0 \\ c \rightarrow 0 \end{cases} \quad f_5 = \begin{cases} a \rightarrow 1 \\ b \rightarrow 1 \\ c \rightarrow 1 \end{cases} \quad f_6 = \begin{cases} a \rightarrow 1 \\ b \rightarrow 1 \\ c \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$f_7 = \begin{cases} a \rightarrow 1 \\ b \rightarrow 0 \\ c \rightarrow 1 \end{cases} \quad f_8 = \begin{cases} a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 1 \\ c \rightarrow 1 \end{cases} \quad \text{sono} = 2^3 = 8$$

Nessuna delle applicazioni è iniettiva mentre la f_1 e f_5 non sono neppure suriettive.

- **Insieme delle funzioni iniettive**

La cardinalità dell'insieme delle funzioni iniettive $f: A \rightarrow B$ è $D_{k,n}$ dove n è il numero degli elementi di A e k quello di B.

Sia $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ contiamo in quanti modi si può costruire una funzione iniettiva

Per $f(a_1)$ si hanno k scelte

Per $f(a_2)$ si hanno $k-1$ scelte

.....

Per $f(a_n)$ si hanno $k-n+1$ scelte n

Si hanno quindi $k(k-1)\dots(k-n+1)$ modi di costruire una funzione iniettiva $= D_{k,n}$

Nb : Se $A=B$ (e quindi $(n=k)$) ogni funzione iniettiva di A in A è una biezione e $D_{k,k}=k!/0!=k!$
 $= P_k$ diventa il numero delle permutazioni di k oggetti distinti.

• Insieme delle funzioni surgettive

L'insieme delle funzioni surgettive da un insieme A di cardinalità n ad un insieme B di cardinalità k

$(k < n)$ è data da $|j(n,k)| = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$

L'insieme delle funzioni suriettive da un insieme di 5 elementi ad un insieme di ordine 2 è =

$$|j(5,2)| = (-1)^0 \binom{2}{0} (2-0)^5 + (-1)^1 \binom{2}{1} (2-1)^5 = 32-2 = 30$$

L'insieme delle funzioni suriettive può essere calcolato sottraendo dal numero delle funzioni il numero delle funzioni non suriettive cioè $2^5 - 2 = 32 - 2 = 30$

I numeri di Stirling

Si chiama numero di Stirling di secondo tipo $S(n,k)$ il numero delle partizioni di un insieme di ordine n in k sottoinsiemi non vuoti e disgiunti.

Vogliamo determinare il numero $S(4,2)$ che determina il numero delle partizioni dell'insieme $A = \{1,2,3,4\}$ in due sottoinsiemi. Indicata con $\{X,Y\}$ la generica partizione possiamo elencare tutte le possibilità:

1. $X=\{1\}, \quad Y=\{2,3,4\}$

2. $X=\{2\}, \quad Y=\{1,3,4\}$

3. $X=\{3\}, \quad Y=\{1,2,4\}$

4. $X=\{4\}, \quad Y=\{1,2,3\}$

5. $X=\{1,2\}, \quad Y=\{3,4\}$

6. $X=\{1,3\}, \quad Y=\{2,4\}$

7. $X=\{1,4\}, \quad Y=\{2,3\}$

$$S(4,2) = 7$$

La formula di ricorrenza permette di determinare il numero di Stirling per qualsiasi insieme

Teorema Sia $S(n, k)$ il numero di partizioni di un insieme X di n elementi in k parti con $1 \leq k \leq n$ allora :

$$[S(n, 0) = 0]$$

$$S(n, 1) = 1$$

$$S(n, n) = 1$$

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k) \quad \text{con } 2 \leq k \leq n-1$$

$$S(4, 2) = S(3, 1) + 2S(3, 2)$$

$$S(3, 2) = S(2, 1) + 2S(2, 2) = 1 + 2 = 3$$

$$S(4, 2) = 1 + 6 = 7$$

$$\text{Valgono le seguenti proprietà } S(n, 2) = 2^{n-1} - 1 \quad \text{e} \quad S(n, n-1) = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

I numeri di Stirling possono essere rappresentati mediante una tabella infinita detta triangolo di Stirling avente come riga n -esima $S(n, 1); S(n, 2); S(n, n-1); S(n, n)$

Le prime sei righe del triangolo di Stirling sono

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & S(1, 1) & & \\ & & & & & & \\ & & & S(2, 1) & & S(2, 2) & \\ & & S(3, 1) & & S(3, 2) & & ; S(3, 3) \\ & S(4, 1) & & S(4, 2) & & S(4, 3) & & S(4, 4) \end{array}$$

$$S(1, 1) = 1$$

$$S(2, 1) = 1$$

$$S(2, 2) = 1$$

$$S(3, 1) = 1$$

$$S(3, 2) = S(2, 1) + 2S(2, 2) = 1 + 2 \times 1 = 3$$

$$S(4, 2) = S(3, 1) + 2S(3, 2) = 1 + 2 \times 3 = 7$$

.....

.....

				1					
				1		1			
			1		3		1		
		1		7		6		1	
	1		15		25		10		1
1		31		90		65		15	1

S

Vale anche la seguente formula $S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$

I numeri di Stirling del secondo tipo si possono utilizzare per calcolare quante sono le applicazioni suriettive da un insieme A di ordine n ad un insieme B di ordine k . Precisamente tale numero è dato da $k! S(n, k)$

I numeri di Bell

Dato un insieme I di ordine n, si definisce numero di Bell B(n) il numero di tutte le possibili partizioni dell'insieme I.

Si osserva subito che l' n-esimo numero di Bell è $B(n) = \sum_{k=1}^n S(n, k)$ cioè è la somma degli elementi dell'n-esima riga del triangolo di Stirling.

$B(1) = 1, B(2) = 2(1+1), B(3) = 5(1+3+1), B(4) = 15(1+7+6+1), B(5) = 52(1+15+25+10+1)$

Dato un insieme I di ordine $n \geq 1$, siano $B(n-i)$ e $B(n)$ l'(n-i)-esimo e l'n-esimo numero di Bell si ha:

$$B(n) = \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} B(n-i) \text{ formula di Aitken}$$

I numeri di Bell si può possono trovare più rapidamente con la costruzione del triangolo di Bell

Il triangolo di Bell si ottiene iniziando la prima riga con 1

1

La seconda riga inizia con l'ultimo numero della riga precedente e si aggiunge come secondo numero la somma del numero che precede e quello posizionato sopra il numero precedente. Quindi:

1

1 2

La terza riga inizia con l'ultimo numero della seconda , il secondo numero è ottenuto sommando il numero precedente con il numero che sta sopra al primo.

1

1 2

2 3 5

5 7 10 15

15 20 27 37 52

La sequenza degli ultimi numeri di ogni riga costituisce l'insieme dei numeri di Bell.

- 1) 10 libri sono disposti in uno scaffale. Qual è il numero di modi in cui possono essere scambiati di posto i libri in maniera che dopo l'operazione solo tre libri non sono più collocati nel loro posto originale?

$$\binom{10}{3} \cdot 2 = 240 \text{ spostamento di tre libri collocati in modo diverso (2 è il numero delle dismutazione di tre oggetti)}$$

- 2) Da un gruppo di 20 dipendenti della sede centrale di un'azienda se ne devono scegliere 12 da assegnare ad 8 filiali in modo che ad ogni filiale ne sia assegnato almeno uno. In quanti modi si può fare questa operazione?

$$\binom{20}{12} \cdot 8! \cdot S(12,8)$$

- 3) Una banca deve distribuire 9 nuovi dipendenti tra 7 filiali . In quanti modi possono essere assegnati questi dipendenti alle filiali se non si impone alcuna restrizione? (Possono anche essere destinati ad una sola filiale).

E' il numero delle applicazioni da un insieme di 9 elementi ad uno di 7 elementi $= 7^9$

Se invece si vuole che ogni filiale ne abbia almeno uno?

N° delle funzioni suriettive $= 7!S(9,7) = 2.328.480$

- 4) Cinque amici hanno finito di leggere un libro ciascuno e adesso vogliono scambiarsi i libri in modo che ognuno legga un libro nuovo. In quanti modi ciò può essere fatto? $!5 = 44$ (subfattoriale di 5)