



**Progetto
Olimpiadi della Matematica**

POLO DI TREVISO – CAMPIONATI MATEMATICI

MINISTAGE OLIMPICO – 28 FEBBRAIO 2025 – ESERCIZI DI ALLENAMENTO - testo

PARTE SECONDA – ALGEBRA

I

1 PROBLEMI E LORO SOLUZIONI

Problema 1 : sapendo che l'equazione $2x^4 + 5x^3 - 21x^2 + 5x + 2 = 0$ ha 4 soluzioni a, b, c, d , quanto vale

$$a + b + c + d - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)?$$

SOLUZIONE Problema 1

Dalle formule di Viète si ha

$$a + b + c + d = -\frac{5}{2}, \quad abc + abd + acd + bcd = -\frac{5}{2}, \quad abcd = 1$$

$$a + b + c + d - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) = a + b + c + d - \frac{abc + abd + acd + bcd}{abcd} = -\frac{5}{2} - \frac{-\frac{5}{2}}{1} = 0$$

Problema 2: siano α, β le radici del polinomio $x^2 - 2025x + 2024$. Dimostrare che $\alpha^{2025} + \beta^{2025}$ è un numero intero.

SOLUZIONE Problema 2

Sia $S_n = \alpha^n + \beta^n$. Dobbiamo dimostrare che S_{2025} è un numero intero. Dalle formule di Viète segue che $\alpha + \beta = 2025$ e $\alpha \cdot \beta = 2024$. Proviamo per induzione su n che S_n è un numero intero. Si ha che $S_0 = \alpha^0 + \beta^0 = 2$, $S_1 = \alpha + \beta = 2025$ entrambi interi. Supponiamo S_i intero per ogni $i \leq n$ e dimostriamo che S_{n+1} è un numero intero. $S_{n+1} = \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} = (\alpha^n + \beta^n)(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) = 2025S_n - 2024S_{n-1}$ e quindi S_{n+1} è un numero intero.

Problema 3: Calcola la somma dei cubi della radici dell'equazione $x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 5 = 0$

SOLUZIONE Problema 3

Applicando le formule di Girard-Newton abbiamo

$$1 \cdot S_1 + (-1) \cdot 1 = 0 \quad S_1 = 1$$

$$1 \cdot S_2 + (-1) \cdot S_1 + 2 \cdot 2 = 0 \quad S_2 = -3$$

$$1 \cdot S_3 + (-1) \cdot S_2 + 2 \cdot S_1 + (-3) \cdot 3 = 0 \quad S_3 = 4$$

Pertanto la somma dei cubi delle radici $S_3 = 4$.

Problema 4: Sapendo che $a + b + c = 1$, $a^2 + b^2 + c^2 = 2$, $a^3 + b^3 + c^3 = 3$, calcola $a^5 + b^5 + c^5$.

SOLUZIONE Problema 4

Cerchiamo un polinomio di grado tre che abbia a , b , c come radici $(x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ac)x - abc$. Dobbiamo calcolare $ab + bc + ac$ e abc per determinare i coefficienti del polinomio e poi applicare le formule di Girard-Newton.

$$ab + bc + ac = \frac{(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b + c)(ab + bc + ac)x - 3abc$$

$$1^3 = 3 + 3 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - abc \quad abc = \frac{1}{6}$$

Il polinomio cercato è $x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}$ che ha le stesse radici di $6x^3 - 6x^2 - 3x - 1$. Applicando le formule di Girard-Newton a quest'ultimo abbiamo

$$6 \cdot S_4 - 6 \cdot S_3 - 3 \cdot S_2 - S_1 = 0 \quad S_4 = \frac{25}{6}$$

$$6 \cdot S_5 - 6 \cdot S_4 - 3 \cdot S_3 - S_2 = 0 \quad S_5 = 6$$

Problema 5 "Belmanto 03 Febbraio 2025"

Determina la somma dei cubi delle radici del polinomio $3x^3 - 2x^2 - 11x - 28$. Nella risposta indicare 81 volte il numero trovato.

SOLUZIONE Problema 5 "Belmanto 03 Febbraio 2025"

Applicando le formule di Girard-Newton abbiamo

$$3 \cdot S_1 - 2 \cdot 1 = 0 \quad S_1 = \frac{2}{3}$$

$$3 \cdot S_2 - 2 \cdot S_1 - 11 \cdot 2 = 0 \quad S_2 = \frac{70}{9}$$

$$3 \cdot S_3 - 2 \cdot S_2 - 11 \cdot S_1 - 28 \cdot 3 = 0 \quad S_3 = \frac{962}{27}$$

Pertanto $81 \cdot S_3 = 2886$.

Problema 6: Se x , y , z sono numeri reali, dimostra la disuguaglianza

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + xz)$$

SOLUZIONE Problema 6

Sviluppando il quadrato di trinomio e semplificando termini simili la disuguaglianza diventa

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}{2} \geq 0$$

Problema 7: Siano x, y numeri reali tali che

$$5x^2 + y^2 - 4xy + 24 \leq 10x - 1$$

Determina il valore di $x^2 + y^2$

SOLUZIONE Problema 7

Possiamo riscrivere la disuguaglianza

$$x^2 - 10x + 25 + 4x^2 - 4xy + y^2 \leq 0$$
$$(x-5)^2 + (2x-y)^2 \leq 0$$

Da cui necessariamente $x-5=0$ e $2x-y=0$, $(x, y) = (5, 10)$ e $x^2 + y^2 = 125$.

Problema 8: Siano a, b, c numeri reali positivi tali che $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Dimostrare che

$$a + b + c + \frac{1}{abc} \geq 4\sqrt{3}$$

SOLUZIONE Problema 8

Dalla disuguaglianza AM-GM si ha

$$1 = a^2 + b^2 + c^2 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2} \quad \frac{1}{a^2 b^2 c^2} \geq 3^3$$
$$a + b + c + \frac{1}{abc} = a + b + c + \frac{1}{9abc} + \dots + \frac{1}{9abc}$$
$$\geq 12 \cdot \sqrt[12]{\frac{abc}{9^9 (abc)^9}} \geq 12 \cdot \sqrt[12]{\frac{1}{9^9} \cdot 3^{12}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

Problema 9: Se a, b, c sono numeri reali tali che $a+b+c=3$, dimostrare che $4a^2+6b^2+3c^2 \geq 12$.

SOLUZIONE Problema 9

Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$(4a^2 + 6b^2 + 3c^2)(9 + 6 + 12) \geq (6a + 6b + 6c)^2 = 36 \cdot 9$$

$$4a^2 + 6b^2 + 3c^2 \geq \frac{36 \cdot 9}{27} = 12$$

Problema 10: Trovare il resto della divisione polinomiale tra $x^{2025} + 2x$ e $x + 1$.

SOLUZIONE Problema 10

Basta studiare $x^{2025} + 2x$ modulo $x + 1$.

Si ha $x \equiv -1 \pmod{x+1}$, di conseguenza

$$x^{2025} + 2x \equiv -1 - 2 = -3 \pmod{x+1}$$

Problema 11: Dimostrare che $a + b + c$ divide $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

SOLUZIONE Problema 11

Studiamo $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ modulo $a + b + c$.

Si ha $a + b + c \equiv 0 \pmod{a+b+c}$ e quindi $a \equiv -b - c \pmod{a+b+c}$.

Di conseguenza

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &\equiv (-b - c)^3 + b^3 + c^3 - 3(-b - c)bc \\ &= -b^3 - c^3 - 3b^2c - 3bc^2 + b^3 + c^3 + 3b^2c + 3bc^2 = 0 \pmod{a+b+c} \end{aligned}$$

Segue che $a + b + c$ divide $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

2 ESERCITAZIONE

ESERCIZIO 1

Siano a, b, c, d quattro radici reali tali che

$$a = \sqrt{44 + \sqrt{71 + a}}, \quad b = \sqrt{44 + \sqrt{71 - b}}, \quad c = \sqrt{44 - \sqrt{71 + c}}, \quad d = \sqrt{44 - \sqrt{71 - d}}$$

. Calcolare il prodotto $abcd$.

ESERCIZIO 2

Siano a, b, c numeri reali positivi tali che $a + b + c = 2$. Trovare il minimo valore dell'espressione

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2$$

ESERCIZIO 3

Siano x, y, z, t numeri reali tali che $x + y + z + t = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$. Dimostrare che

$$-1 \leq xy + yz + zt + tx \leq 0$$

ESERCIZIO 4

Determinare il resto della divisione polinomiale tra $p(x) = x^{2025} - x^{28} + 2x^4$ e $x^3 + x^2 + x + 1$.

3 SOLUZIONI

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

a, c sono le soluzioni di $(x^2 - 44)^2 - x - 71 = 0$ mentre b, d di $(x^2 - 44)^2 + x - 71 = 0$. Quindi a, b, c, d sono le radici del polinomio $p(x) = [(x^2 - 44)^2 - x - 71] \cdot [(x^2 - 44)^2 + x - 71] = [(x^2 - 44)^2 - x^2]$. Essendo $p(x)$ pari anche $-a, -b, -c, -d$ sono radici di $p(x)$ e quindi utilizzando le formule di Viète segue che $a^2b^2c^2d^2 = p(0) = (44^2 - 71)^2$ da cui $abcd = 44^2 - 71 = 1865$.

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

Dalla disuguaglianza AM-HM segue $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} = \frac{9}{2}$.

Usando il Lemma di Titu $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{1}{3} \left(a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{1}{3} \left(2 + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{169}{12}$.

L'uguaglianza si verifica se $a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b} = c + \frac{1}{c} = \frac{13}{6}$, $a = b = c = \frac{2}{3}$. Il minimo risulta quindi $\frac{169}{12}$.

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Posto $S = xy + yz + zt + tx$ abbiamo $0 = (x + y + z + t)^2 = 1 + 2S + 2(xz + yt)$ da cui segue $S = -\frac{1}{2} - xz - yt$. La disuguaglianza richiesta equivale a

$$-1 \leq \frac{1}{2} - xz - yt \leq 0 \iff -\frac{1}{2} \leq xz + yt \leq \frac{1}{2} \iff |xz + yt| \leq \frac{1}{2}$$

Quest'ultima discende dalle disuguaglianze di Cauchy-Swartz e AM-GM

$$|xz + yt| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{t^2 + z^2} = \sqrt{(x^2 + y^2)(t^2 + z^2)} \quad \text{Cauchy - Schwarz}$$

$$\sqrt{(x^2 + y^2)(t^2 + z^2)} \leq \frac{x^2 + y^2 + t^2 + z^2}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{AM - GM}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

Studiamo $p(x)$ modulo $x^3 + x^2 + x + 1$. Osserviamo che $x^4 - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$ è congruo a 0 modulo $x^3 + x^2 + x + 1$. Quindi $x^4 \equiv 1$ modulo $x^3 + x^2 + x + 1$ e $p(x) = x^{2024} \equiv x - x^{28} + 2x^4 \equiv 1 \cdot x - 1 + 2 = x + 1$. Il resto della divisione polinomiale tra $p(x)$ e $x^3 + x^2 + x + 1$ è $x + 1$.