



Progetto
Olimpiadi della Matematica

POLO DI TREVISO – CAMPIONATI MATEMATICI

STAGE OLIMPICO – 23 GENNAIO 2026 – ESERCIZI DI ALLENAMENTO BIENNIO

PROBLEMA 1 (FEBBRAIO 2020):

ESERCIZIO DIMOSTRATIVO

- (a) Supponiamo che $n = k^2$ sia un quadrato perfetto. Dimostrare che il numero di divisori positivi di n strettamente minori di k è uguale al numero di divisori di n strettamente maggiori di k .
- (b) Supponiamo che $n = k^2$ sia un quadrato perfetto. Dimostrare che n ha al massimo $2k - 1$ divisori positivi.
- (c) Trovare tutti gli interi positivi k tali che k^2 abbia esattamente $2k - 1$ divisori positivi.

SOLUZIONE:

- (a) Se d è un divisore di n allora anche n/d è un divisore di n . Ne segue che per ogni divisore d di $n = k^2$ con $0 < d < k$ esiste un corrispondente divisore n/d con $n/d = k^2/d > k$, e viceversa per ogni divisore d di k^2 con $d > k$ esiste un corrispondente divisore $0 < n/d < k$.

I divisori positivi di k^2 minori di k sono quindi tanti quanti quelli maggiori di k , come voluto.

Soluzione alternativa. Se n è un quadrato perfetto, la sua scrittura in fattori primi è della forma $n = p_1^{2\alpha_1} \cdot p_2^{2\alpha_2} \cdots p_i^{2\alpha_i}$. I suoi divisori sono numeri della forma $p_1^{\beta_1} \cdots p_i^{\beta_i}$, con $0 \leq \beta_j \leq 2\alpha_j$ per ogni $j = 1, \dots, i$. In particolare $k = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i}$. Se scriviamo $n = d \cdot \frac{n}{d}$ come prodotto di due suoi divisori, dobbiamo redistribuire i fattori primi di n tra i due divisori considerati. Avremo dunque che i due fattori sono della forma

$$d = p_1^{\beta_1} \cdots p_i^{\beta_i}, \quad \frac{n}{d} = p_1^{2\alpha_1 - \beta_1} \cdots p_i^{2\alpha_i - \beta_i},$$

che possiamo scrivere, in termini di k , come

$$d = k \cdot p_1^{\beta_1 - \alpha_1} \cdots p_i^{\beta_i - \alpha_i}, \quad \frac{n}{d} = k \cdot p_1^{\alpha_1 - \beta_1} \cdots p_i^{\alpha_i - \beta_i} :$$

stiamo moltiplicando k per un numero e per il suo reciproco, quindi uno tra d e n/d sarà maggiore di k e l'altro sarà minore di k . In particolare per ogni divisore minore di k ce ne è uno maggiore di k .

- (b) Per quanto visto nel punto (a), i divisori in tutto sono due volte quelli minori di k più 1 (cioè il divisore k). I numeri interi positivi minori di k sono $k - 1$, quindi n può avere al più $2(k - 1) + 1 = 2k - 1$ divisori.
- (c) Continuando il ragionamento fatto al punto (b), dire che $n = k^2$ ha $2k - 1$ divisori significa che tutti i numeri interi positivi minori o uguali a k dividono n . Osserviamo che per $k = 1$ si ha $n = 1$, che ha un unico divisore positivo (se stesso), per cui in effetti il numero di divisori è $2k - 1 = 2 \cdot 1 - 1$. Similmente, per $k = 2$ si ha $n = 4$, che ha come divisori 1, 2 e 4, come voluto: $2 \cdot 2 - 1 = 3$. Osserviamo poi che un intero n non ha divisori > 1 in comune con $n - 1$. Se $k \geq 3$ questo porta ad una contraddizione: abbiamo osservato che $k - 1 > 1$ deve dividere k^2 , e questo è assurdo perché $k - 1$ divide $n - 1 = k^2 - 1 = (k + 1)(k - 1)$. Non ci sono quindi soluzioni per $k \geq 3$, dunque i k voluti sono solo $k = 1$ e $k = 2$.

PROBLEMA 2 (FEBBRAIO 2019):

ESERCIZIO DIMOSTRATIVO

Ci sono 4037 lampadine disposte in fila e numerate da 1 a 4037. Inizialmente ogni lampadina può essere accesa o spenta. Una mossa consiste nello scegliere due lampadine numerate a, b tali che a/b o b/a sia un numero primo e cambiare lo stato di entrambe. Dimostrare che in un numero finito di mosse si possono rendere le lampadine da 1 a 2019 tutte accese qualunque sia la configurazione iniziale.

SOLUZIONE:

Mostriamo direttamente una sequenza di mosse che porta ad avere tutte le prime 2019 lampadine accese.

- Se la lampadina con il numero 2019 è spenta, scegliamo $a = 2019$ e $b = 673$, in modo che $\frac{a}{b} = 3$ sia un numero primo e cambiamo lo stato di entrambe le lampadine. Ora la lampadina 2019 è accesa.
- Se la lampadina numero 1 è spenta, scegliamo $a = 2$ e $b = 1$ e cambiamo lo stato di entrambe. Ora la lampadina numero 1 è accesa.
- Se la lampadina numero 2 è spenta, scegliamo $a = 4$ e $b = 2$ e cambiamo lo stato di entrambe. Ora la lampadina numero 2 è accesa.
- Se la lampadina numero k è spenta, con $1 \leq k \leq 2018$, scegliamo $a = 2k$ e $b = k$ e cambiamo lo stato di entrambe. Ora la lampadina numero k è accesa.
- Se la lampadina numero 2018 è spenta, scegliamo $a = 4036$ e $b = 2018$ e cambiamo lo stato di entrambe. Ora la lampadina numero 2018 è accesa.

Notiamo che ogni lampadina che viene accesa durante una mossa poi non viene più cambiata di stato dalle mosse successive: infatti la lampadina 2019 è cambiata di stato solo al primo turno perché in tutti i turni successivi vengono utilizzate lampadine della forma k o $2k$ con $1 \leq k \leq 2018$ e 2019 è dispari, mentre se una lampadina k con $1 \leq k \leq 2018$ viene cambiata di stato, nei turni successivi verranno solo considerate lampadine con numeri maggiori di k .

Nota: questa soluzione funziona solo se le mosse vengono applicate nell'ordine descritto sopra, altrimenti si rischierebbe di spegnere nuovamente una lampadina accesa in precedenza.

PROBLEMA 3 (FEBBRAIO 2018):

Consideriamo un orologio digitale e i numeri formati dalle quattro cifre (ore e minuti): le 10:45 indicheranno il numero 1045. Quale è il più piccolo intero positivo che non divide alcuno dei numeri che compaiono fra le 11:00 e le 12:59?

SOLUZIONE:

La risposta è 84. Stiamo cercando il più piccolo n che non divide alcuno dei numeri fra 1100 e 1159, né alcuno dei numeri fra 1200 e 1259. Osserviamo per prima cosa che, dati k numeri consecutivi, tra loro esiste esattamente un multiplo di k . Poiché sull'orologio compaiono tutti i numeri fra 1100 e 1159, ogni numero n minore o uguale a 60 divide almeno uno dei numeri considerati, e quindi non va bene. Analogamente dato $60 \leq n \leq 80$, n divide esattamente due numeri fra 1100 e 1259 ma al più uno di essi può cadere fra i numeri che non compaiono sull'orologio (ovvero i numeri da 1160 a 119) perché questi sono 40: quindi n divide sicuramente uno dei numeri che compaiono sull'orologio. Abbiamo così scartato tutti gli $n \leq 80$. D'altra parte un calcolo diretto ci dà che $81 \times 15 = 1215$, $82 \times 15 = 1230$, $83 \times 15 = 1245$ e quindi questi n non sono accettabili, mentre si ha che $84 \times 13 = 1092 < 1100$, $84 \times 14 = 1176 > 1159$ e $84 \times 15 = 1260 > 1259$.

PROBLEMA 4 (FEBBRAIO 2018):

ESERCIZIO DIMOSTRATIVO

- (a) Trovare tutti gli interi positivi n di due cifre che godano della seguente proprietà: entrambi gli interi che si ottengono cancellando una delle due cifre della rappresentazione decimale di n sono divisori (interi positivi) di n .
- (b) Sia $n > 10$ un intero che si scrive con k cifre decimali, tutte diverse da zero. Supponiamo che ciascuno degli interi ottenuti cancellando una delle k cifre della rappresentazione decimale di n sia un divisore (intero positivo) di n . Mostrare che necessariamente $k = 2$.

Esempio. Per $n = 123$ si ha $k = 3$, e gli interi ottenuti cancellando cifre di n sono 23, 13, 12.

SOLUZIONE:

- (a) Scriviamo $n = 10a + b$ con a e b cifre decimali, ossia $1 \leq a \leq 9$ e $1 \leq b \leq 9$: per ipotesi $a = 0$ non è possibile (dato che $n > 10$), e $b = 0$ non è possibile perché in tal caso cancellando la prima cifra di n si troverebbe 0, che non divide n . Le condizioni sono allora che a divida $10a + b$, che è equivalente al fatto che a divida $10a + b - 10a = b$, e che b divida $10a + b$, equivalente a che b divida $10a + b - b = 10a$. Poniamo allora $b = ka$, dove k è un intero tale che $1 \leq k \leq 9$. Troviamo che $b = ka$ divide $10a$, ovvero che k divide 10: se $k = 1$ troviamo nove soluzioni in cui $a = b$, ossia $n = 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$. Se $k = 2$ allora $b < 10$ implica $a < 5$, e troviamo le soluzioni $n = 12, 24, 36, 48$. Infine, se $k = 5$, troviamo similmente l'unica soluzione $n = 15$.
- (b) Scriviamo $n = 10a + b$ con $1 \leq b \leq 9$ l'ultima cifra di n e $1 \leq a = (n - b)/10$ un intero (stavolta non necessariamente di una cifra). Cancellando l'ultima cifra, troviamo che a deve dividere $10a + b$, e quindi anche che a divide $(10a + b) - 10 \cdot a = b$. Siccome b è un numero positivo minore uguale a 9, allora anche a (che divide b) non può superare 9, dunque a è composto di una sola cifra e n si scrive con due cifre decimali come voluto. Le soluzioni sono allora solo quelle trovate al punto precedente, che vanno tutte bene perché non hanno cifre nulle.

PROBLEMA 5 (FEBBRAIO 2019)

Sull'isola dei Cavalieri e dei Furfanti, i Cavalieri dicono la verità tranne quando si sbagliano ed i Furfanti mentono sempre. Durante una riunione, 40 isolani si siedono attorno a un grande tavolo rotondo e ciascuno dice: "Io sono vicino a un Cavaliere e a un Furfante". Sapendo che 3 Cavalieri presenti si sbagliano, quanti sono i Cavalieri alla riunione?

SOLUZIONE:

La risposta è **27**.

Cominciamo con qualche osservazione di base. Non possono esserci solo Cavalieri al tavolo, perché dovrebbero sbagliarsi tutti e non solo 3 di loro. Se guardiamo un Furfante o, equivalentemente, un Cavaliere che sbaglia, accanto a lui siedono o due Furfanti o due Cavalieri.

Poiché ci sono almeno un Furfante e almeno un Cavaliere (in realtà almeno tre), c'è almeno un Furfante seduto accanto ad un Cavaliere. In particolare i Furfanti (supponendo ce ne siano più di uno) non possono essere seduti vicini, dal momento che quelli "dentro" il gruppo potrebbero mentire, ma quelli sul bordo avrebbero un vicino Furfante e uno Cavaliere, il che è assurdo. Dunque i Furfanti siedono isolati, circondati da Cavalieri.

Di base, senza i cavalieri che sbagliano, avremmo dunque una successione di terzetti della forma CFC .

Facciamo ora entrare in gioco i Cavalieri che sbagliano. Essi possono inserirsi tra due Cavalieri (ad esempio tra due terzetti consecutivi, ma non solo, se ce ne sono più di uno in seguito all'altro) oppure tra due Furfanti, cioè "eliminando" un Cavaliere, nel momento in cui guardiamo due terzetti consecutivi: $CFCCFC$ può essere sostituito da $CF\bar{C}FC$, in cui $\bar{C}$ è il Cavaliere che si sbaglia. Nel primo caso il numero di persone al tavolo aumenta di 1, nel secondo diminuisce di 1 (due Cavalieri vengono "trasformati" in un solo Cavaliere).

Diciamo che ci sono a Cavalieri che si sbagliano del primo tipo, cioè che siedono tra Cavalieri e $3 - a$ del secondo, cioè tra due Furfanti. Allora al tavolo sono seduti in $40 = k \cdot 3 + a - (3 - a) = 3 \cdot (k - 1) + 2 \cdot a$, con $0 \leq a \leq 3$. Siccome 40 ha classe di resto 1 modulo 3, $2a$ ha classe di resto 1 modulo 3, quindi $a = 2$. Questo significa che abbiamo due Cavalieri che si sbagliano circondati da Cavalieri e uno circondato da Furfanti. Prima di considerare i Cavalieri che si sbagliano, avevamo 39 persone sedute attorno al tavolo, di cui 26 Cavalieri e 13 Furfanti. Abbiamo aggiunto due Cavalieri (che si sbagliano) seduti tra altri Cavalieri, portando il totale di Cavalieri a 28, dopodiché il terzo Cavaliere che si sbaglia ha preso il posto di due Cavalieri seduti uno accanto all'altro e con Furfanti a circondarli, cosa che ha ridotto il numero totale di Cavalieri a 27.

PROBLEMA 6 (FEBBRAIO 2019)

Quante sono le coppie ordinate (x, y) di interi positivi minori o uguali a 2019 tali che $x + y$ e $xy + 1$ siano potenze di 2?

SOLUZIONE:

La risposta è **37**. Supponiamo $x = y$. Allora otteniamo $x^2 + 1$ pari, dunque x dispari. Ma $2x$ con x dispari è potenza di due se e solo se $x = 1$. Ora ci basta contare tutti le coppie (x, y) che verificano le ipotesi con $x < y$. Ciò significa che esistono due interi positivi a e b tali che $x + y = 2^a$ e $xy + 1 = 2^b$. Dato che $(x - 1)(y - 1) \geq 0$, si ha che $b \geq a$. Dalla seconda equazione deduciamo che entrambi i numeri sono dispari, dunque esiste un k dispari tale che $x = 2^{a-1} - k$ e $y = 2^{a-1} + k$. Sostituendo nella seconda equazione otteniamo $2^{2a-2} - k^2 + 1 = 2^b$. Dato che $k = 2m + 1$ abbiamo $4m(m + 1) = 2^{2a-2} - 2^b = 2^b(2^{2a-2-b} - 1)$ che implica $m(m + 1) = 2^{b-2}(2^{2a-2-b} - 1)$. A questo punto se $m = 0$ otteniamo che le coppie della forma $(2^{a-1} - 1, 2^{a-1} + 1)$, assieme alle loro simmetriche, soddisfano le richieste. Esse sono in numero pari a $2 \cdot 10 = 20$, perché ci vanno bene gli esponenti a inclusi tra 2 e 11. In alternativa abbiamo $m \geq 1$. I fattori m e $m + 1$ sono coprimi, dunque uno dei due è divisibile per 2^{b-2} . In entrambi i casi abbiamo che $m \geq 2^{b-2} - 1$. Ma allora $2^{b-2}(2^{2a-2-b} - 1) = m(m + 1) \geq 2^{b-2}(2^{b-2} - 1)$ e dunque $2a - 2 - b \geq b - 2$ che implica $a \geq b$. Ma avevamo già osservato che $b \geq a$, dunque $a = b$, ovvero $(x - 1)(y - 1) = 0$ e dunque le coppie sono del tipo $(1, 2^a - 1)$, assieme alle loro simmetriche. Esse sono $2 \cdot 10 - 1 = 19$, poiché vanno bene gli esponenti a inclusi tra 1 e 10, ma dobbiamo contare $(1, 1)$ una sola volta, da cui il -1 . Dobbiamo però fare attenzione al fatto che abbiamo contato alcune soluzioni sia in questa famiglia, sia nella precedente, cioè $(1, 3)$ e $(3, 1)$. Il numero totale di coppie che soddisfano le richieste è quindi $20 + 19 - 2 = 37$.