

SOLUZIONE DEI PROBLEMI FINALI

PROBLEMA 3

Si trovino tutti i numeri dispari minori di 2020 tali che la somma di tutti i loro divisori positivi sia dispari.

Soluzione:

Osserviamo che gli unici numeri con la proprietà del testo sono i quadrati perfetti: riportiamo 2 dimostrazioni di questo fatto.

Prima soluzione: Naturalmente tutti i divisori di un numero dispari sono dispari: affinché la loro somma sia dispari dunque è necessario sommare un numero dispari di numeri; è noto che il numero dei divisori di un numero n con fattorizzazione $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ è $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$.

$$D_n = \prod_{i=1}^k (\alpha_i + 1) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1).$$

Se D_n deve essere dispari ciascuno dei fattori $(\alpha_i + 1)$ deve essere dispari, ossia α_i è pari per ogni i , ma questo implica che n è un quadrato perfetto.

Seconda soluzione: come nella prima soluzione ci si riduce a cercare numeri dispari con un numero dispari di divisori. Preso un qualunque numero intero positivo m se d è un suo divisore, allora anche $\frac{m}{d}$ divide m . Questi due divisori coincidono se e solo se

$$\frac{m}{d} = d \implies m = d^2,$$

dunque se m è un quadrato perfetto effettivamente ha un numero dispari di divisori, mentre se non lo è per ogni divisore d ne troviamo un altro, diverso da d , e naturalmente

$$\frac{m}{d_1} = \frac{m}{d_2} \iff d_1 = d_2$$

dunque m ha un numero pari di divisori. A questo punto basta contare il numero di quadrati perfetti dispari minori di 2020: dato che $44^2 = 1936$ e $45^2 = 2025$ i quadrati perfetti minori di 2020 sono 44 e quelli dispari sono 22.

.

PROBLEMA 2

Determinare tutti gli interi positivi n tali che $(n+15)(n+2020)$ è un quadrato perfetto. Osserviamo che x è un quadrato perfetto se e solo se $4x$ lo è: ci basta quindi trovare tutti interi n per cui

$$\begin{aligned} 4(n+15)(n+2020) &= 4n^2 + (2 \cdot 2035)(2n) + 2020 \cdot 15 \cdot 4 \\ &= (2n+2035)^2 + 2020 \cdot 15 \cdot 4 - (2035)^2 = (2n+2035)^2 - 2005^2 \end{aligned}$$

è un quadrato. Ponendo $m = 2n + 2035$ gli interi n soluzioni del problema sono esattamente gli interi $m > 2035$ dispari per cui esiste $q \in \mathbb{N}$ tale che

$$m^2 - 2005^2 = q^2 \iff (m-q)(m+q) = 2005^2 = (5 \cdot 401)^2 \quad (1)$$

In particolare $m-q$ e $m+q$ devono essere entrambi divisori di 2005^2 , con $m-q < m+q$ e $m+q > 0$, quindi anche $m-q$ deve essere positivo. Osserviamo che 2005^2 ha esattamente 4 coppie di divisori $(d, \frac{2005^2}{d})$ con $0 < d < 2005$:

$$(m-q, m+q) = \left(d, \frac{2005^2}{d}\right) \implies (m, q) = \left(\frac{d + \frac{2005^2}{d}}{2}, \frac{\frac{2005^2}{d} - d}{2}\right)$$

e i valori trovati sono interi perché i divisori di 2005 sono dispari. Quindi le soluzioni $(m, q) \in \mathbb{N}^2$ dell'equazione 1 sono $\left\{\left(\frac{d + \frac{2005^2}{d}}{2}, \frac{\frac{2005^2}{d} - d}{2}\right) : d \mid 2005, 2005 > d > 0\right\}$ (si verifica che in effetti sono tutte soluzioni).

Osserviamo $m = \frac{d^2 + 2005^2}{2d}$ è sempre dispari: infatti d è dispari, quindi $d^2 \equiv 1 \pmod{4}$, da cui $d^2 + 2005^2 \equiv 2 \pmod{4}$. Inoltre è facile verificare che $m > 2035$. Quindi gli interi cercati sono

$$\left\{\frac{\frac{d^2 + 2005^2}{2d} - 2035}{2} : d \mid 2005, 0 < d < 2005\right\}.$$

PROBLEMA 1:

Risolvere l'equazione:

$$3^a + 2^b + 2015 = 3c!$$

con a, b, c interi non negativi.

Oss. 1: $c \geq 6$ altrimenti il RHS è sempre strettamente minore del LHS.

Oss. 2: se $a = 0$, allora $2^b + 2016 \equiv 3c! \equiv 0 \pmod{3} \implies 2^b \equiv 0 \pmod{3}$, che non è possibile.

Oss. 3: se $b = 0$, allora $3^a + 2016 \equiv 3c! \equiv 0 \pmod{6} \implies 3^a \equiv 0 \pmod{6}$, che di nuovo non è possibile.

Dalle prime tre osservazioni abbiamo che $a, b \geq 1$ e $c \geq 6$.

Oss. 4: dato che vale l'equazione $3^a + 2^b + 2015 = 3c!$ a maggior ragione vale l'equivalenza modulo 3, che si legge:

$$(-1)^b \equiv 1 \pmod{3} \implies b \text{ è pari.}$$

Oss. 5: analogamente l'equazione del testo deve valere anche in modulo 4, e sapendo per l'osservazione 4 che b è pari abbiamo:

$$(-1)^a \equiv 1 \pmod{4} \implies a \text{ è pari.}$$

Oss. 6 infine l'equazione deve valere anche in modulo 9, e sfruttando l'osservazione 5 otteniamo:

$$2^b \equiv 1 \pmod{9} \implies b \equiv 0 \pmod{6}.$$

Chiamiamo $b = 6k$ e $a = 2m$.

Oss. 7: se $c \geq 7$, prendendo l'equazione in modulo 7 abbiamo:

$$3^a + 64^k + 2015 \equiv 3^a + 1 + (-1) \equiv 0 \pmod{7} \implies \text{non esiste soluzione per } c \geq 7.$$

Rimane da discutere solo il caso in cui $c = 6$. Questo si può fare facilmente a mano, dato che ci si riduce all'equazione:

$$9^m + 2^{6k} + 2015 = 3 \cdot 6! \iff 9^m + 2^{6k} = 145$$

e per $k \geq 2$ il membro di sinistra è strettamente maggiore di quello di destra, mentre per $k = 1$ otteniamo

$$9^m = 81 \implies m = 2.$$

L'unica soluzione possibile è dunque $(a, b, c) = (4, 6, 6)$, e si verifica facilmente che funziona.

•