

Matematica Olimpica

Maria Archetti

Stage Olimpico Territoriale · Liceo Da Vinci Treviso

Indirizzi e-mail: *archetti.maria@maxplanck.edu.it*

Stage di Matematica Olimpica: Algebra

28 febbraio 2025

Presentazione del corso

Programma

1. Formule di Viète.
2. Formule di Girard-Newton.
3. Disuguaglianze fondamentali.
4. Applicazioni alle dimostrazioni e ai problemi di Matematica Olimpica.
5. Congruenze polinomiali.

Presentazione del corso

Programma

1. Formule di Viète.
2. Formule di Girard-Newton.
3. Disuguaglianze fondamentali.
4. Applicazioni alle dimostrazioni e ai problemi di Matematica Olimpica.
5. Congruenze polinomiali.

Presentazione del corso

Programma

1. Formule di Viète.
2. Formule di Girard-Newton.
3. Disuguaglianze fondamentali.
4. Applicazioni alle dimostrazioni e ai problemi di Matematica Olimpica.
5. Congruenze polinomiali.

Presentazione del corso

Programma

1. Formule di Viète.
2. Formule di Girard-Newton.
3. Disuguaglianze fondamentali.
4. Applicazioni alle dimostrazioni e ai problemi di Matematica Olimpica.
5. Congruenze polinomiali.

Presentazione del corso

Programma

1. Formule di Viète.
2. Formule di Girard-Newton.
3. Disuguaglianze fondamentali.
4. Applicazioni alle dimostrazioni e ai problemi di Matematica Olimpica.
5. Congruenze polinomiali.

Materiali e strumenti utili allo studio

Testi consigliati

- Safaei. Suppa, Tupitti “problem solving in algebra e teoria dei numeri”, Collana U Math
- Facchini A. “Algebra e Matematica Discreta”, Decibel Zanichelli
- Franciosi S., De Giovanni F. “Elementi di Algebra", Aracne

Altri materiali e strumenti

- Videolezioni Stage Senior, Stage EGMO

Materiali e strumenti utili allo studio

Testi consigliati

- Safaei. Suppa, Tupitti “problem solving in algebra e teoria dei numeri”, Collana U Math
- Facchini A. “Algebra e Matematica Discreta”, Decibel Zanichelli
- Franciosi S., De Giovanni F. “Elementi di Algebra", Aracne

Altri materiali e strumenti

- Videolezioni Stage Senior, Stage EGMO

Formule di Viète

Sia

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

un polinomio a coefficienti reali di grado n e siano $x_1, x_2, \dots, x_n$ le sue radici (in generale complesse), contate con la loro molteplicità.

Allora valgono le seguenti relazioni:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\sigma_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \cdots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

.....

$$\sigma_n = x_1 x_2 \cdots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Dimostrazione delle Formule di Viète

Uguagliando i coefficienti di x^{n-1} nell'identità

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

otteniamo la relazione

$$-a_n \cdot (x_1 + \cdots + x_n) = a_{n-1}$$

da cui segue che

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Allo stesso modo, uguagliando i coefficienti di x^{n-2} , abbiamo

$$a_n \cdot (x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n) = a_{n-2}$$

da cui deduciamo che

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}.$$

Le rimanenti relazioni si possono dimostrare in modo analogo.

Dimostrazione delle Formule di Viète

Uguagliando i coefficienti di x^{n-1} nell'identità

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

otteniamo la relazione

$$-a_n \cdot (x_1 + \cdots + x_n) = a_{n-1}$$

da cui segue che

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Allo stesso modo, uguagliando i coefficienti di x^{n-2} , abbiamo

$$a_n \cdot (x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n) = a_{n-2}$$

da cui deduciamo che

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}.$$

Le rimanenti relazioni si possono dimostrare in modo analogo.

Dimostrazione delle Formule di Viète

Uguagliando i coefficienti di x^{n-1} nell'identità

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

otteniamo la relazione

$$-a_n \cdot (x_1 + \cdots + x_n) = a_{n-1}$$

da cui segue che

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Allo stesso modo, uguagliando i coefficienti di x^{n-2} , abbiamo

$$a_n \cdot (x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n) = a_{n-2}$$

da cui deduciamo che

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}.$$

Le rimanenti relazioni si possono dimostrare in modo analogo.

Problemi con utilizzo delle formule di Viète

- **Problema 1:** sapendo che l'equazione $2x^4 + 5x^3 - 21x^2 + 5x + 2 = 0$ ha 4 soluzioni a, b, c, d , quanto vale

$$a + b + c + d - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)?$$

- **Problema 2:** siano α, β le radici del polinomio $x^2 - 2025x + 2024$. Dimostrare che $\alpha^{2025} + \beta^{2025}$ è un numero intero.

Problemi con utilizzo delle formule di Viète

- **Problema 1:** sapendo che l'equazione $2x^4 + 5x^3 - 21x^2 + 5x + 2 = 0$ ha 4 soluzioni a, b, c, d , quanto vale

$$a + b + c + d - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)?$$

- **Problema 2:** siano α, β le radici del polinomio $x^2 - 2025x + 2024$. Dimostrare che $\alpha^{2025} + \beta^{2025}$ è un numero intero.

SOLUZIONE Problema 1

Dalle formule di Viète si ha

$$a + b + c + d = -\frac{5}{2}, \quad abc + abd + acd + bcd = -\frac{5}{2}, \quad abcd = 1$$

$$\begin{aligned} a + b + c + d - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) &= a + b + c + d - \frac{abc + abd + acd + bcd}{abcd} \\ &= -\frac{5}{2} - \frac{-\frac{5}{2}}{1} = 0 \end{aligned}$$

SOLUZIONE Problema 2

Sia $S_n = \alpha^n + \beta^n$. Dalle formule di Viète segue che $\alpha + \beta = 2025$ e $\alpha \cdot \beta = 2024$.

Proviamo per induzione su n che S_n è un numero intero.

Si ha che $S_0 = \alpha^0 + \beta^0 = 2$, $S_1 = \alpha + \beta = 2025$ entrambi interi. Supponiamo S_i intero per ogni $i \leq n$ e dimostriamo che S_{n+1} è un numero intero.

$S_{n+1} = \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} = (\alpha^n + \beta^n)(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) = 2025S_n - 2024S_{n-1}$ e quindi S_{n+1} è un numero intero per ogni n .

SOLUZIONE Problema 2

Sia $S_n = \alpha^n + \beta^n$. Dalle formule di Viète segue che $\alpha + \beta = 2025$ e $\alpha \cdot \beta = 2024$.

Proviamo per induzione su n che S_n è un numero intero.

Si ha che $S_0 = \alpha^0 + \beta^0 = 2$, $S_1 = \alpha + \beta = 2025$ entrambi interi. Supponiamo S_i intero per ogni $i \leq n$ e dimostriamo che S_{n+1} è un numero intero.

$S_{n+1} = \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} = (\alpha^n + \beta^n)(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) = 2025S_n - 2024S_{n-1}$ e quindi S_{n+1} è un numero intero per ogni n .

SOLUZIONE Problema 2

Sia $S_n = \alpha^n + \beta^n$. Dalle formule di Viète segue che $\alpha + \beta = 2025$ e $\alpha \cdot \beta = 2024$.

Proviamo per induzione su n che S_n è un numero intero.

Si ha che $S_0 = \alpha^0 + \beta^0 = 2$, $S_1 = \alpha + \beta = 2025$ entrambi interi. Supponiamo S_i intero per ogni $i \leq n$ e dimostriamo che S_{n+1} è un numero intero.

$S_{n+1} = \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} = (\alpha^n + \beta^n)(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) = 2025S_n - 2024S_{n-1}$ e quindi S_{n+1} è un numero intero per ogni n .

SOLUZIONE Problema 2

Sia $S_n = \alpha^n + \beta^n$. Dalle formule di Viète segue che $\alpha + \beta = 2025$ e $\alpha \cdot \beta = 2024$.

Proviamo per induzione su n che S_n è un numero intero.

Si ha che $S_0 = \alpha^0 + \beta^0 = 2$, $S_1 = \alpha + \beta = 2025$ entrambi interi. Supponiamo S_i intero per ogni $i \leq n$ e dimostriamo che S_{n+1} è un numero intero.

$S_{n+1} = \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} = (\alpha^n + \beta^n)(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) = 2025S_n - 2024S_{n-1}$ e quindi S_{n+1} è un numero intero per ogni n .

Formule di Girard-Newton

Indichiamo con

$$S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$$

Teorema Girard-Newton: Sia

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

un polinomio a coefficienti reali di grado n e siano $x_1, x_2, \cdots, x_n$ le sue radici (in generale complesse), contate con la loro molteplicità.

Allora per ogni intero $k > 0$ valgono le seguenti relazioni:

$$a_n S_k + a_{n-1} S_{k-1} + a_{n-2} S_{k-2} + \cdots + a_{n-k} k = 0 \quad \text{se } 1 \leq k \leq n$$

$$a_n S_k + a_{n-1} S_{k-1} + a_{n-2} S_{k-2} + \cdots + a_0 S_{k-n} = 0 \quad \text{se } k > n$$

Problemi con utilizzo delle formule di Girard-Newton

- **Problema 3:** Calcola la somma dei cubi della radici dell'equazione $x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 5 = 0$
- **Problema 4:** Sapendo che $a + b + c = 1$, $a^2 + b^2 + c^2 = 2$, $a^3 + b^3 + c^3 = 3$, calcola $a^5 + b^5 + c^5$.
- **Problema 5 "Belmanto 03 Febbraio 2025":** Determina la somma dei cubi delle radici del polinomio $3x^3 - 2x^2 - 11x - 28$. Nella risposta indicare 81 volte il numero trovato.

Problemi con utilizzo delle formule di Girard-Newton

- **Problema 3:** Calcola la somma dei cubi della radici dell'equazione $x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 5 = 0$
- **Problema 4:** Sapendo che $a + b + c = 1$, $a^2 + b^2 + c^2 = 2$, $a^3 + b^3 + c^3 = 3$, calcola $a^5 + b^5 + c^5$.
- **Problema 5 "Belmanto 03 Febbraio 2025":** Determina la somma dei cubi delle radici del polinomio $3x^3 - 2x^2 - 11x - 28$. Nella risposta indicare 81 volte il numero trovato.

Problemi con utilizzo delle formule di Girard-Newton

- **Problema 3:** Calcola la somma dei cubi della radici dell'equazione $x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 5 = 0$
- **Problema 4:** Sapendo che $a + b + c = 1$, $a^2 + b^2 + c^2 = 2$, $a^3 + b^3 + c^3 = 3$, calcola $a^5 + b^5 + c^5$.
- **Problema 5 "Belmanto 03 Febbraio 2025":** Determina la somma dei cubi delle radici del polinomio $3x^3 - 2x^2 - 11x - 28$. Nella risposta indicare 81 volte il numero trovato.

SOLUZIONE Problema 3

Applicando le formule di Girard-Newton abbiamo

$$1 \cdot S_1 + (-1) \cdot 1 = 0 \quad S_1 = 1$$

$$1 \cdot S_2 + (-1) \cdot S_1 + 2 \cdot 2 = 0 \quad S_2 = -3$$

$$1 \cdot S_3 + (-1) \cdot S_2 + 2 \cdot S_1 + (-3) \cdot 3 = 0 \quad S_3 = 4$$

Pertanto la somma dei cubi delle radici $S_3 = 4$.

SOLUZIONE Problema 3

Applicando le formule di Girard-Newton abbiamo

$$1 \cdot S_1 + (-1) \cdot 1 = 0 \quad S_1 = 1$$

$$1 \cdot S_2 + (-1) \cdot S_1 + 2 \cdot 2 = 0 \quad S_2 = -3$$

$$1 \cdot S_3 + (-1) \cdot S_2 + 2 \cdot S_1 + (-3) \cdot 3 = 0 \quad S_3 = 4$$

Pertanto la somma dei cubi delle radici $S_3 = 4$.

SOLUZIONE Problema 3

Applicando le formule di Girard-Newton abbiamo

$$1 \cdot S_1 + (-1) \cdot 1 = 0 \quad S_1 = 1$$

$$1 \cdot S_2 + (-1) \cdot S_1 + 2 \cdot 2 = 0 \quad S_2 = -3$$

$$1 \cdot S_3 + (-1) \cdot S_2 + 2 \cdot S_1 + (-3) \cdot 3 = 0 \quad S_3 = 4$$

Pertanto la somma dei cubi delle radici $S_3 = 4$.

SOLUZIONE Problema 3

Applicando le formule di Girard-Newton abbiamo

$$1 \cdot S_1 + (-1) \cdot 1 = 0 \quad S_1 = 1$$

$$1 \cdot S_2 + (-1) \cdot S_1 + 2 \cdot 2 = 0 \quad S_2 = -3$$

$$1 \cdot S_3 + (-1) \cdot S_2 + 2 \cdot S_1 + (-3) \cdot 3 = 0 \quad S_3 = 4$$

Pertanto la somma dei cubi delle radici $S_3 = 4$.

Soluzioni Problemi

SOLUZIONE Problema 4

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc$$

$$ab+bc+ac = \frac{(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3 + 3(a+b+c)(ab+bc+ac) - 3abc$$

$$1^3 = 3 + 3 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - abc \quad abc = \frac{1}{6}$$

$$x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6} \text{ ha le stesse radici di } 6x^3 - 6x^2 - 3x - 1$$

$$6 \cdot S_4 - 6 \cdot S_3 - 3 \cdot S_2 - S_1 = 0 \quad S_4 = \frac{25}{6}$$

$$6 \cdot S_5 - 6 \cdot S_4 - 3 \cdot S_3 - S_2 = 0 \quad S_5 = 6$$

Soluzioni Problemi

SOLUZIONE Problema 4

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc$$

$$ab+bc+ac = \frac{(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3 + 3(a+b+c)(ab+bc+ac) - 3abc$$

$$1^3 = 3 + 3 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - abc \quad abc = \frac{1}{6}$$

$$x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6} \text{ ha le stesse radici di } 6x^3 - 6x^2 - 3x - 1$$

$$6 \cdot S_4 - 6 \cdot S_3 - 3 \cdot S_2 - S_1 = 0 \quad S_4 = \frac{25}{6}$$

$$6 \cdot S_5 - 6 \cdot S_4 - 3 \cdot S_3 - S_2 = 0 \quad S_5 = 6$$

Soluzioni Problemi

SOLUZIONE Problema 4

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc$$

$$ab+bc+ac = \frac{(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3 + 3(a+b+c)(ab+bc+ac) - 3abc$$

$$1^3 = 3 + 3 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - abc \quad abc = \frac{1}{6}$$

$$x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6} \text{ ha le stesse radici di } 6x^3 - 6x^2 - 3x - 1$$

$$6 \cdot S_4 - 6 \cdot S_3 - 3 \cdot S_2 - S_1 = 0 \quad S_4 = \frac{25}{6}$$

$$6 \cdot S_5 - 6 \cdot S_4 - 3 \cdot S_3 - S_2 = 0 \quad S_5 = 6$$

Soluzioni Problemi

SOLUZIONE Problema 4

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc$$

$$ab+bc+ac = \frac{(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3 + 3(a+b+c)(ab+bc+ac) - 3abc$$

$$1^3 = 3 + 3 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - abc \quad abc = \frac{1}{6}$$

$$x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6} \text{ ha le stesse radici di } 6x^3 - 6x^2 - 3x - 1$$

$$6 \cdot S_4 - 6 \cdot S_3 - 3 \cdot S_2 - S_1 = 0 \quad S_4 = \frac{25}{6}$$

$$6 \cdot S_5 - 6 \cdot S_4 - 3 \cdot S_3 - S_2 = 0 \quad S_5 = 6$$

SOLUZIONE Problema 5 "Belmanto 03 Febbraio 2025"

Applicando le formule di Girard-Newton abbiamo

$$3 \cdot S_1 - 2 \cdot 1 = 0 \quad S_1 = \frac{2}{3}$$

$$3 \cdot S_2 - 2 \cdot S_1 - 11 \cdot 2 = 0 \quad S_2 = \frac{70}{9}$$

$$3 \cdot S_3 - 2 \cdot S_2 - 11 \cdot S_1 - 28 \cdot 3 = 0 \quad S_3 = \frac{962}{27}$$

Pertanto $81 \cdot S_3 = 2886$.

SOLUZIONE Problema 5 "Belmanto 03 Febbraio 2025"

Applicando le formule di Girard-Newton abbiamo

$$3 \cdot S_1 - 2 \cdot 1 = 0 \quad S_1 = \frac{2}{3}$$

$$3 \cdot S_2 - 2 \cdot S_1 - 11 \cdot 2 = 0 \quad S_2 = \frac{70}{9}$$

$$3 \cdot S_3 - 2 \cdot S_2 - 11 \cdot S_1 - 28 \cdot 3 = 0 \quad S_3 = \frac{962}{27}$$

Pertanto $81 \cdot S_3 = 2886$.

SOLUZIONE Problema 5 "Belmanto 03 Febbraio 2025"

Applicando le formule di Girard-Newton abbiamo

$$3 \cdot S_1 - 2 \cdot 1 = 0 \quad S_1 = \frac{2}{3}$$

$$3 \cdot S_2 - 2 \cdot S_1 - 11 \cdot 2 = 0 \quad S_2 = \frac{70}{9}$$

$$3 \cdot S_3 - 2 \cdot S_2 - 11 \cdot S_1 - 28 \cdot 3 = 0 \quad S_3 = \frac{962}{27}$$

Pertanto $81 \cdot S_3 = 2886$.

SOLUZIONE Problema 5 "Belmanto 03 Febbraio 2025"

Applicando le formule di Girard-Newton abbiamo

$$3 \cdot S_1 - 2 \cdot 1 = 0 \quad S_1 = \frac{2}{3}$$

$$3 \cdot S_2 - 2 \cdot S_1 - 11 \cdot 2 = 0 \quad S_2 = \frac{70}{9}$$

$$3 \cdot S_3 - 2 \cdot S_2 - 11 \cdot S_1 - 28 \cdot 3 = 0 \quad S_3 = \frac{962}{27}$$

Pertanto $81 \cdot S_3 = 2886$.

Disuguaglianze: utilizzo della somma di quadrati

- **Problema 6:** Se x, y, z sono numeri reali, dimostra la disuguaglianza

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + xz)$$

- **Problema 7:** Siano x, y numeri reali tali che

$$5x^2 + y^2 - 4xy + 24 \leq 10x - 1$$

Determina il valore di $x^2 + y^2$

Disuguaglianze: utilizzo della somma di quadrati

- **Problema 6:** Se x, y, z sono numeri reali, dimostra la disuguaglianza

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + xz)$$

- **Problema 7:** Siano x, y numeri reali tali che

$$5x^2 + y^2 - 4xy + 24 \leq 10x - 1$$

Determina il valore di $x^2 + y^2$

SOLUZIONE Problema 6

Sviluppando il quadrato di trinomio e semplificando termini simili la disuguaglianza diventa

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}{2} \geq 0$$

SOLUZIONE Problema 7

Possiamo riscrivere la disuguaglianza

$$x^2 - 10x + 25 + 4x^2 - 4xy + y^2 \leq 0$$

$$(x - 5)^2 + (2x - y)^2 \leq 0$$

Da cui necessariamente $x - 5 = 0$ e $2x - y = 0$, $(x, y) = (5, 10)$ e $x^2 + y^2 = 125$.

SOLUZIONE Problema 7

Possiamo riscrivere la disuguaglianza

$$x^2 - 10x + 25 + 4x^2 - 4xy + y^2 \leq 0$$

$$(x - 5)^2 + (2x - y)^2 \leq 0$$

Da cui necessariamente $x - 5 = 0$ e $2x - y = 0$, $(x, y) = (5, 10)$ e $x^2 + y^2 = 125$.

SOLUZIONE Problema 7

Possiamo riscrivere la disuguaglianza

$$x^2 - 10x + 25 + 4x^2 - 4xy + y^2 \leq 0$$

$$(x - 5)^2 + (2x - y)^2 \leq 0$$

Da cui necessariamente $x - 5 = 0$ e $2x - y = 0$, $(x, y) = (5, 10)$ e $x^2 + y^2 = 125$.

Disuguaglianze fra medie

Definizione Dati n numeri reali positivi $x_1, x_2, \dots, x_n$, possiamo definire le seguenti medie

$$\text{HM} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

MEDIA ARMONICA

$$\text{GM} = \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}$$

MEDIA GEOMETRICA

$$\text{AM} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

MEDIA ARITMETICA

$$\text{QM} = \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

MEDIA QUADRATICA

Disuguaglianze fra medie

Definizione Dati n numeri reali positivi $x_1, x_2, \dots, x_n$, possiamo definire le seguenti medie

$$\text{HM} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

MEDIA ARMONICA

$$\text{GM} = \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}$$

MEDIA GEOMETRICA

$$\text{AM} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

MEDIA ARITMETICA

$$\text{QM} = \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

MEDIA QUADRATICA

Disuguaglianze fra medie

Definizione Dati n numeri reali positivi $x_1, x_2, \dots, x_n$, possiamo definire le seguenti medie

$$\text{HM} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

MEDIA ARMONICA

$$\text{GM} = \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}$$

MEDIA GEOMETRICA

$$\text{AM} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

MEDIA ARITMETICA

$$\text{QM} = \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

MEDIA QUADRATICA

Disuguaglianze fra medie

Definizione Dati n numeri reali positivi $x_1, x_2, \dots, x_n$, possiamo definire le seguenti medie

- $\text{HM} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}$ *MEDIA ARMONICA*

- $\text{GM} = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$ *MEDIA GEOMETRICA*

- $\text{AM} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ *MEDIA ARITMETICA*

- $\text{QM} = \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}$ *MEDIA QUADRATICA*

Teoremi sulle disuguaglianze

Teorema AM-GM:

Se $x_1, x_2, \dots, x_n$, sono numeri reali NON NEGATIVI, allora

$$x_1 + \dots + x_n \geq n \cdot \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$$

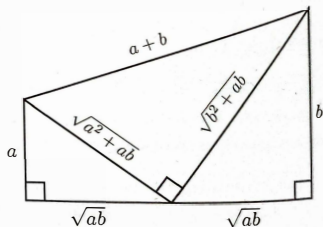
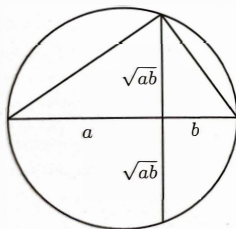
e vale l'uguaglianza se e solo se $x_1 = \dots = x_n$

Teoremi sulle disuguaglianze

Dimostrazione del Teorema AM-GM caso $n=2$:

Poniamo $x_1 = a$ e $x_2 = b$. Si ha $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ se e solo se $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ vera se a, b reali NON negativi. L'uguaglianza vale se e solo se $a = b$.

Interessanti le dimostrazioni geometriche



Teoremi sulle disuguaglianze

Teorema HM-GM:

Se $x_1, x_2, \dots, x_n$, sono numeri reali POSITIVI, allora

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $x_1 = \dots = x_n$.

dim: La tesi discende dalla disuguaglianza $AM - GM$ applicata ai numeri $\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}$.

Teoremi sulle disuguaglianze

Teorema HM-GM:

Se $x_1, x_2, \dots, x_n$, sono numeri reali POSITIVI, allora

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $x_1 = \dots = x_n$.

dim: La tesi discende dalla disuguaglianza $AM - GM$ applicata ai numeri $\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}$.

Teoremi sulle disuguaglianze

Teorema AM-QM:

Se $x_1, x_2, \dots, x_n$, sono numeri reali positivi, allora

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $x_1 = \dots = x_n$

Teoremi sulle disuguaglianze

Teorema: Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Se $a_1, a_2, \dots, a_n$ e $b_1, \dots, b_n$, sono numeri reali, allora

$$(a_1^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $(a_1, \dots, a_n) = \lambda(b_1, \dots, b_n)$

Teoremi sulle disuguaglianze

Dimostrazione Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Consideriamo il polinomio quadratico

$$p(x) = (b_1x + a_1)^2 + (b_2x + a_2)^2 = (b_1^2 + b_2^2)x^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2)x + (a_1^2 + a_2^2)$$

deve avere il discriminante negativo o nullo

$$4(a_1b_1 + a_2b_2)^2 - 4(b_1^2 + b_2^2)(a_1^2 + a_2^2) \leq 0$$

che risulta equivalente a Cauchy-Schwarz nel caso $n = 2$. Per il caso generale basta considerare

$$p(x) = (b_1x + a_1)^2 + (b_2x + a_2)^2 + \cdots + (b_nx + a_n)^2$$

l'uguaglianza si verifica se e solo se il discriminante risulta nullo.

Teoremi sulle disuguaglianze

Teorema: Lemma di Titu

Se $a_1, a_2, \dots, a_n$ e $b_1, \dots, b_n$, sono numeri reali positivi, allora

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $(a_1, \dots, a_n) = \lambda(b_1, \dots, b_n)$

Teoremi sulle disuguaglianze

Dimostrazione Teorema AM-QM con Lemma di Titu:

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \frac{x_1^2}{1} + \cdots + \frac{x_n^2}{1} \geq \frac{(x_1 + \cdots + x_n)^2}{n}$$

che risulta equivalente a

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

Problemi

- **Problema 8:** Siano a, b, c numeri reali positivi tali che $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Dimostrare che

$$a + b + c + \frac{1}{abc} \geq 4\sqrt{3}$$

- **Problema 9:** Se a, b, c sono numeri reali tali che $a + b + c = 3$, dimostrare che $4a^2 + 6b^2 + 3c^2 \geq 12$.

Problemi

- **Problema 8:** Siano a, b, c numeri reali positivi tali che $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Dimostrare che

$$a + b + c + \frac{1}{abc} \geq 4\sqrt{3}$$

- **Problema 9:** Se a, b, c sono numeri reali tali che $a + b + c = 3$, dimostrare che $4a^2 + 6b^2 + 3c^2 \geq 12$.

SOLUZIONE Problema 8

Dalla disuguaglianza AM-GM si ha

$$1 = a^2 + b^2 + c^2 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2} \quad \frac{1}{a^2 b^2 c^2} \geq 3^3$$

$$\begin{aligned} a + b + c + \frac{1}{abc} &= a + b + c + \frac{1}{9abc} + \dots + \frac{1}{9abc} \\ &\geq 12 \cdot \sqrt[12]{\frac{abc}{9^9 (abc)^9}} \geq 12 \cdot \sqrt[12]{\frac{1}{9^9} \cdot 3^{12}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

SOLUZIONE Problema 8

Dalla disuguaglianza AM-GM si ha

$$1 = a^2 + b^2 + c^2 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2} \quad \frac{1}{a^2 b^2 c^2} \geq 3^3$$

$$\begin{aligned} a + b + c + \frac{1}{abc} &= a + b + c + \frac{1}{9abc} + \dots + \frac{1}{9abc} \\ &\geq 12 \cdot \sqrt[12]{\frac{abc}{9^9 (abc)^9}} \geq 12 \cdot \sqrt[12]{\frac{1}{9^9} \cdot 3^{12}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

SOLUZIONE Problema 8

Dalla disuguaglianza AM-GM si ha

$$1 = a^2 + b^2 + c^2 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2} \quad \frac{1}{a^2 b^2 c^2} \geq 3^3$$

$$\begin{aligned} a + b + c + \frac{1}{abc} &= a + b + c + \frac{1}{9abc} + \dots + \frac{1}{9abc} \\ &\geq 12 \cdot \sqrt[12]{\frac{abc}{9^9 (abc)^9}} \geq 12 \cdot \sqrt[12]{\frac{1}{9^9} \cdot 3^{12}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

SOLUZIONE Problema 9

Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$(4a^2 + 6b^2 + 3c^2)(9 + 6 + 12) \geq (6a + 6b + 6c)^2 = 36 \cdot 9$$

$$4a^2 + 6b^2 + 3c^2 \geq \frac{36 \cdot 9}{27} = 12$$

SOLUZIONE Problema 9

Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$(4a^2 + 6b^2 + 3c^2)(9 + 6 + 12) \geq (6a + 6b + 6c)^2 = 36 \cdot 9$$

$$4a^2 + 6b^2 + 3c^2 \geq \frac{36 \cdot 9}{27} = 12$$

Congruenze polinomiali

Def: congruenza polinomiale

Siano $f(x), g(x), p(x)$ polinomi con $p(x) \neq 0$.

Diremo che $f(x)$ è **congruo** a $g(x)$ **modulo** $p(x)$ se $p(x)$ divide $f(x) - g(x)$ e sciveremo

$$f(x) \equiv g(x) \quad (\text{mod } p(x))$$

Esempi:

$$x^2 + x + 1 \equiv 1 \quad (\text{mod } x + 1)$$

$$3x^4 + 4x^2 + 2x + 2 \equiv 2x + 1 \quad (\text{mod } x^2 + 1)$$

Problemi

- **Problema 10:** Trovare il resto della divisione polinomiale tra $x^{2025} + 2x$ e $x + 1$.
- **Problema 11:** Dimostrare che $a + b + c$ divide $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

Problemi

- **Problema 10:** Trovare il resto della divisione polinomiale tra $x^{2025} + 2x$ e $x + 1$.
- **Problema 11:** Dimostrare che $a + b + c$ divide $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

SOLUZIONE Problema 10

Basta studiare $x^{2025} + 2x$ modulo $x + 1$.

Si ha $x \equiv -1 \pmod{x+1}$, di conseguenza

$$x^{2025} + 2x \equiv -1 - 2 = -3 \pmod{x+1}$$

SOLUZIONE Problema 10

Basta studiare $x^{2025} + 2x$ modulo $x + 1$.

Si ha $x \equiv -1 \pmod{x+1}$, di conseguenza

$$x^{2025} + 2x \equiv -1 - 2 = -3 \pmod{x+1}$$

SOLUZIONE Problema 11

Studiamo $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ modulo $a + b + c$.

Si ha $a + b + c \equiv 0 \pmod{a + b + c}$ e quindi $a \equiv -b - c \pmod{a + b + c}$.

Di conseguenza

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &\equiv (-b - c)^3 + b^3 + c^3 - 3(-b - c)bc \\ &= -b^3 - c^3 - 3b^2c - 3bc^2 + b^3 + c^3 + 3b^2c + 3bc^2 = 0 \pmod{a + b + c} \end{aligned}$$

Segue che $a + b + c$ divide $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

SOLUZIONE Problema 11

Studiamo $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ modulo $a + b + c$.

Si ha $a + b + c \equiv 0 \pmod{a + b + c}$ e quindi $a \equiv -b - c \pmod{a + b + c}$.

Di conseguenza

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &\equiv (-b - c)^3 + b^3 + c^3 - 3(-b - c)bc \\ &= -b^3 - c^3 - 3b^2c - 3bc^2 + b^3 + c^3 + 3b^2c + 3bc^2 = 0 \pmod{a + b + c} \end{aligned}$$

Segue che $a + b + c$ divide $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

Esercitazione

ESERCIZIO 1

Siano a, b, c, d quattro radici reali tali che

$$a = \sqrt{44 + \sqrt{71 + a}}, \quad b = \sqrt{44 + \sqrt{71 - b}},$$

$$c = \sqrt{44 - \sqrt{71 + c}}, \quad d = \sqrt{44 - \sqrt{71 - d}}$$

. Calcolare il prodotto $abcd$.

ESERCIZIO 2

Siano a, b, c numeri reali positivi tali che $a + b + c = 2$. Trovare il minimo valore dell'espressione

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2$$

ESERCIZIO 3

Siano x, y, z, t numeri reali tali che $x + y + z + t = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$.
Dimostrare che

$$-1 \leq xy + yz + zt + tx \leq 0$$

ESERCIZIO 4

Determinare il resto della divisione polinomiale tra $p(x) = x^{2025} - x^{28} + 2x^4$ e $x^3 + x^2 + x + 1$.

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

a, c sono le soluzioni di $(x^2 - 44)^2 - x - 71 = 0$ mentre c, d di $(x^2 - 44)^2 + x - 71 = 0$. Quindi a, b, c, d sono le radici del polinomio $p(x) = [(x^2 - 44)^2 - x - 71] \cdot [(x^2 - 44)^2 + x - 71] = [(x^2 - 44)^2 - x^2]$. Essendo $p(x)$ pari anche $-a, -b, -c, -d$ sono radici di $p(x)$ e quindi utilizzando le formule di Viète segue che $a^2 b^2 c^2 d^2 = p(0) = (44^2 - 71)^2$ da cui $abcd = 44^2 - 71 = 1865$.

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

Dalla disuguaglianza AM-HM segue $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} = \frac{9}{2}$.

Usando il Lemma di Titu $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \geq$

$$\frac{1}{3} \left(a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{1}{3} \left(2 + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{169}{12}.$$

L'uguaglianza si verifica se $a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b} = c + \frac{1}{c} = \frac{13}{6}$, $a = b = c = \frac{2}{3}$. Il

minimo risulta quindi $\frac{169}{12}$.

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Posto $S = xy + yz + zt + tx$ abbiamo $0 = (x + y + z + t)^2 = 1 + 2S + 2(xz + yt)$ da cui segue $S = -\frac{1}{2} - xz - yt$. La disuguaglianza richiesta equivale a

$$-1 \leq \frac{1}{2} - xz - yt \leq 0 \iff -\frac{1}{2} \leq xz + yt \leq \frac{1}{2} \iff |xz + yt| \leq \frac{1}{2}$$

Quest'ultima discende dalle disuguaglianze di Cauchy-Swartz e AM-GM

$$|xz + yt| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{t^2 + z^2} = \sqrt{(x^2 + y^2)(t^2 + z^2)} \quad \text{Cauchy - Schwarz}$$

$$\sqrt{(x^2 + y^2)(t^2 + z^2)} \leq \frac{x^2 + y^2 + t^2 + z^2}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{AM - GM}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 4

Studiamo $p(x)$ modulo $x^3 + x^2 + x + 1$. Osserviamo che

$x^4 - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$ è congruo a 0 modulo $x^3 + x^2 + x + 1$.

Quindi $x^4 \equiv 0$ modulo $x^3 + x^2 + x + 1$ e

$p(x) = x^{2024} \equiv x - x^{28} + 2x^4 \equiv 1 \cdot x - 1 + 2 = x + 1$. Il resto della divisione polinomiale tra $p(x)$ e $x^3 + x^2 + x + 1$ è $x + 1$.