TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

STAGE DI MATEMATICA

28 FEBBRAIO 2025 – ORIETTA ZANGIACOMI – ORIETTAZANGIACOMI@GMAIL.COM

PREREQUISITI

1. concetto di funzione
2. composizione di funzioni
3. nozioni di geometria sintetica del biennio (fino alle similitudini)

CREDITI

Ho consultato:

- i testi degli esercizi dal sito delle Olimpiadi della Matematica https://olimpiadi.dm.unibo.it, in particolare dall'archivio dei testi assegnati nelle «gare di Febbraio»
- gli screenshot di Geogebra dal sito https://www.geogebra.org, mentre lavoravo per predisporre la lezione
- Wikipedia

OSSERVAZIONE

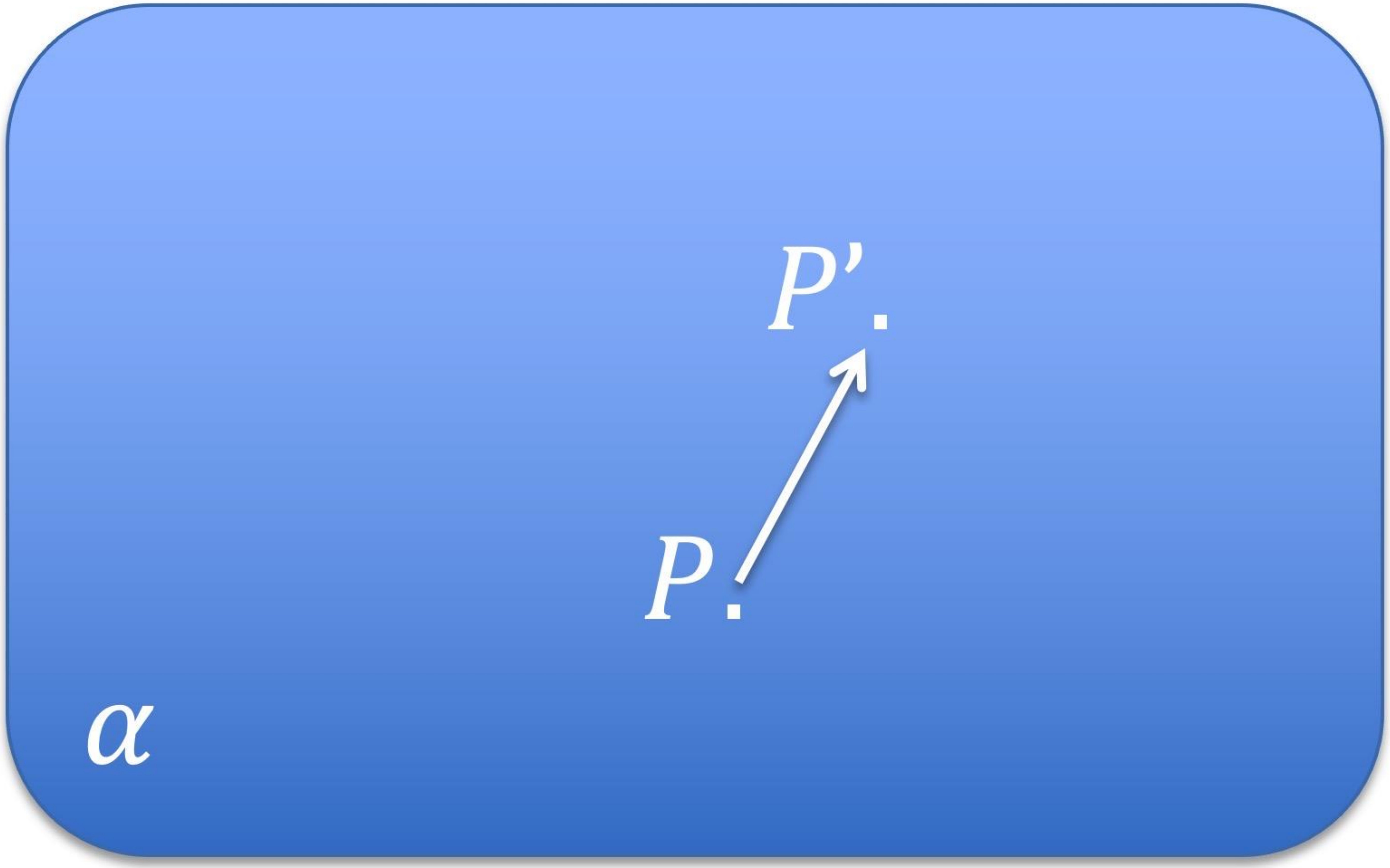
QUESTO SIMBOLO SARA' AFFIANCATO ALLE DEFINIZIONI / FORMULE / TEOREMI CHE VI POTRANNO SERVIRE IN FUTURO SIA NELLE GARE INDIVIDUALI CHE IN QUELLE A SQUADRE

NEI PROSSIMI GIORNI INVIEREMO AI VOSTRI REFERENTI SCOLASTICI QUESTO FILE, MA PER ORA PRENDETE **TANTI** APPUNTI

TRASFORMAZIONE - definizione

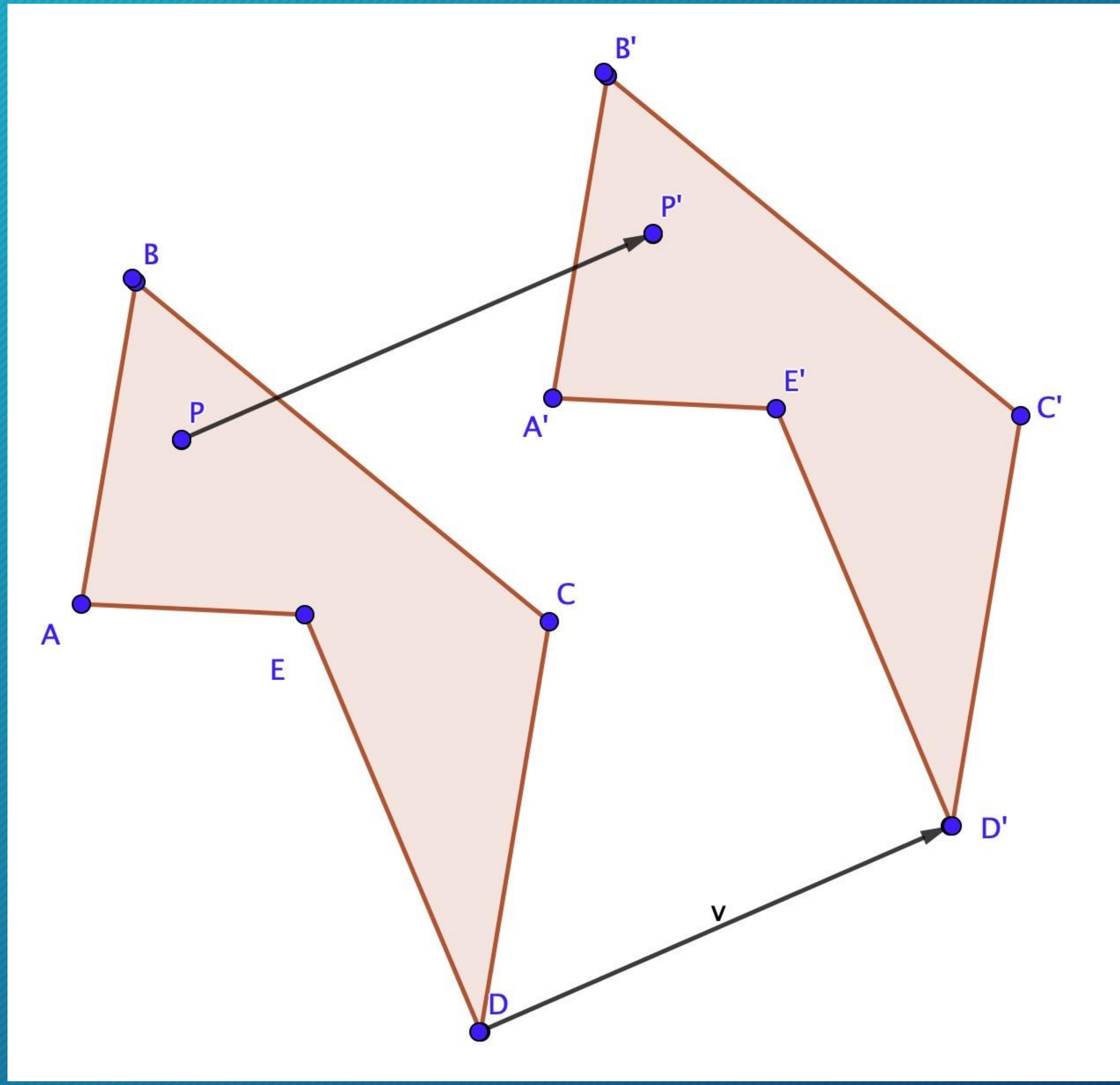
TRASFORMAZIONE GEOMETRICA = funzione dal piano sul piano che mappa punti in punti

$$\tau: \quad \alpha \rightarrow \alpha$$
$$P \mapsto P'$$



TRASFORMAZIONE – un primo esempio

una TRASLAZIONE di vettore $\vec{v}$ fa «scivolare» (=traslare) il piano applicando il vettore $\vec{v}$ ad ogni punto del piano



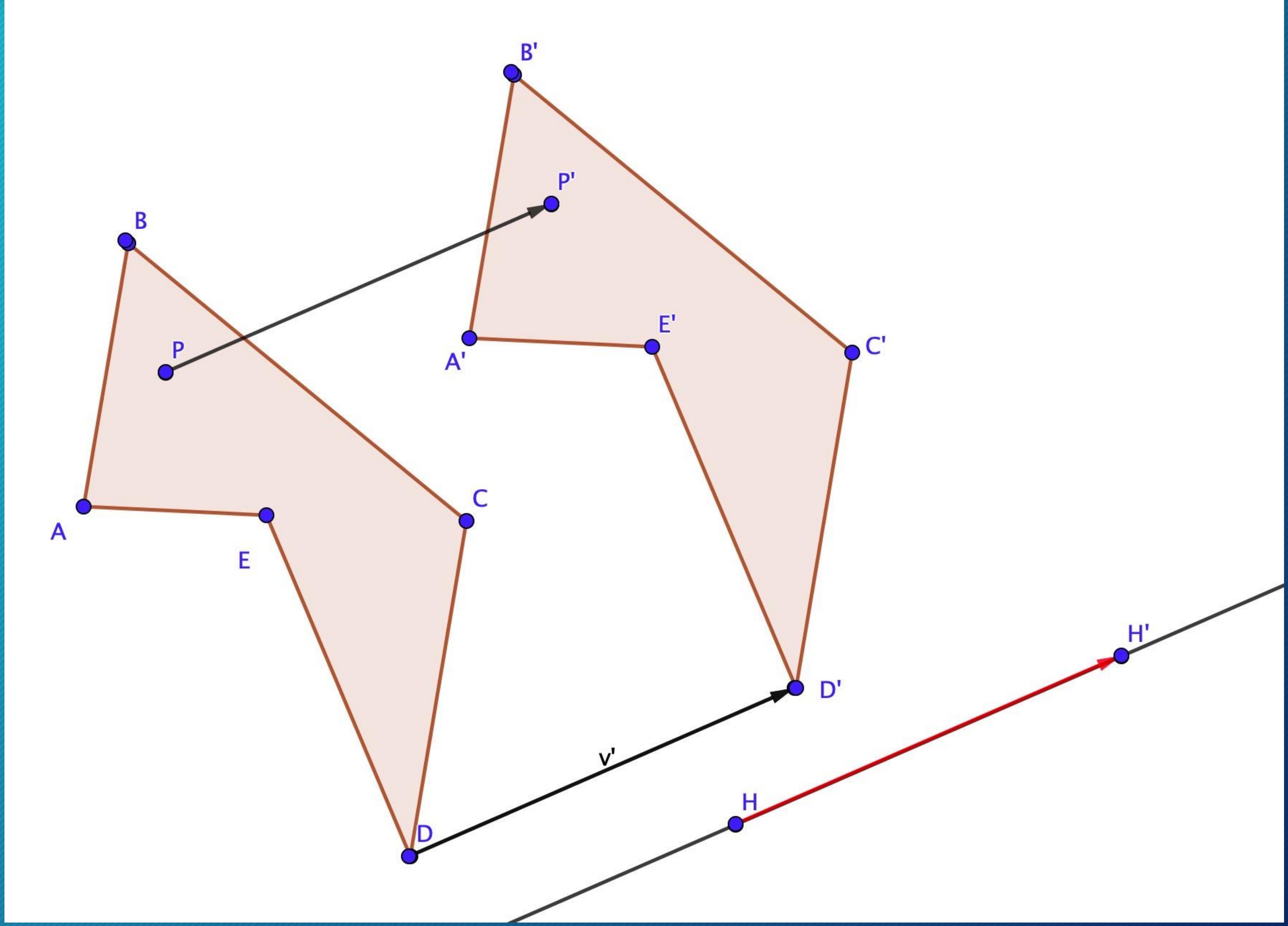
PUNTI UNITI E FIGURE UNITE - definizione

PUNTO UNITO = punto che coincide con il suo trasformato

FIGURA UNITA = figura che coincide con la sua trasformata; non necessariamente le figure unite contengono punti uniti

PUNTI UNITI E FIGURE UNITE – un primo esempio

nella TRASLAZIONE di vettore $\vec{v}$ che fa «scivolare» (=traslare) il piano applicando il vettore $\vec{v}$ ad ogni punto del piano, non ci sono punti uniti, ma sono unite tutte le rette che hanno la stessa direzione del vettore: <u>**le rette traslate coincidono con le rette originali, ma i loro punti non sono uniti**</u>



INVARIANTE (o PROPRIETA' INVARIANTE) - definizione

PROPRIETA' INVARIANTI DI (o RISPETTO A) UNA TRASFORMAZIONE = proprietà delle figure geometriche che vengono mantenute nelle figure trasformate

COMPOSIZIONE DI TRASFORMAZIONI

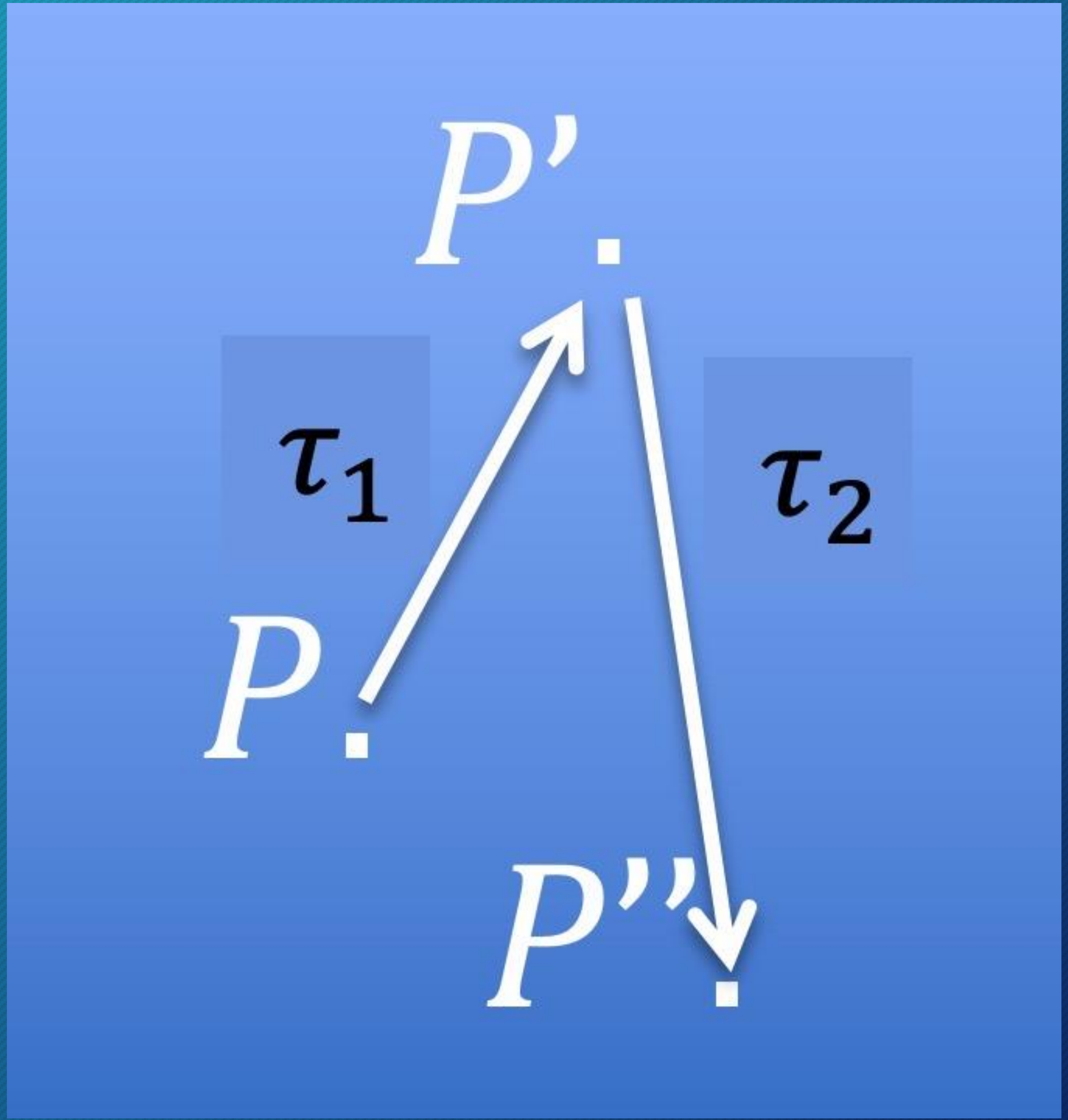
Come tutte le funzioni, anche le TRASFORMAZIONI si possono comporre:

$$\tau_1: \ \alpha \to \alpha \qquad P \mapsto P'$$

$$\tau_2: \ \alpha \to \alpha \qquad P' \mapsto P''$$

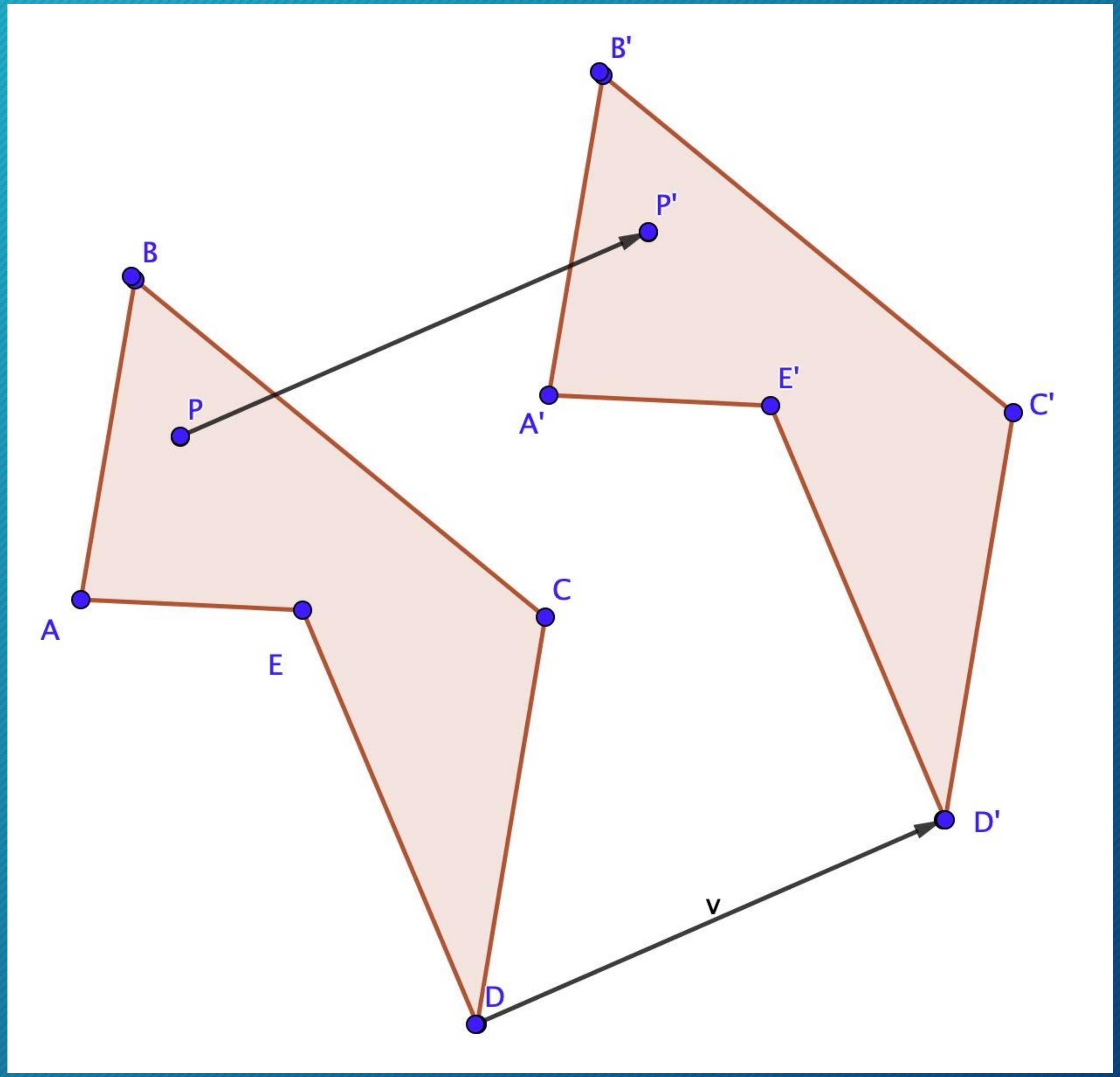
$$\tau_2 \circ \tau_1: \ \alpha \to \alpha \qquad P \mapsto P''$$

$$\tau_2 \circ \tau_1(P) = \tau_2\big(\underbrace{\tau_1(P)}_{P'}\big) = \tau_2(P') = P''$$



INVARIANTE (o PROPRIETA’ INVARIANTE) – un primo esempio

nella TRASLAZIONE di vettore $\overrightarrow{v}$ che fa «scivolare» (=traslare) il piano applicando il vettore $\overrightarrow{v}$ ad ogni punto del piano, le figure mantengono la FORMA e i punti traslati mantengono le stesse distanze gli uni dagli altri



CLASSIFICAZIONE DELLE TRASFORMAZIONI (nel piano)

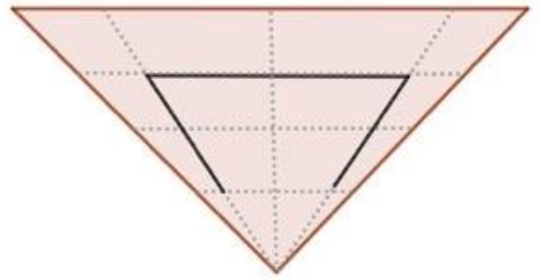
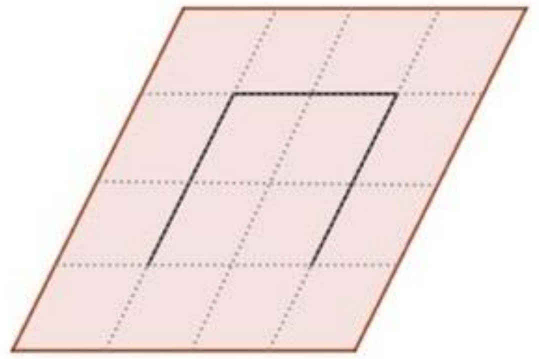
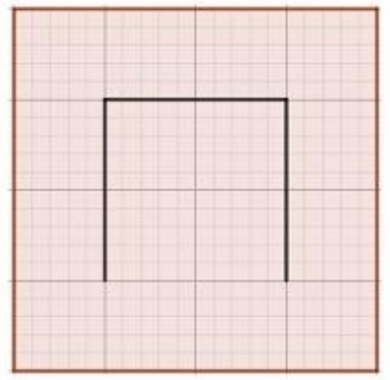
Le TRASFORMAZIONI vengono classificate in base ai loro INVARIANTI: dall'alto verso il basso ne conservano sempre meno

Ogni categoria ha diverse sottoclassificazioni

Isometrie
Omotetie
Affinità
Proiettività
Omeomorfismi

UNO SGUARDO D'INSIEME

Si tratta di una schematizzazione molto sintetica e non del tutto completa e rigorosa, ma fornisce uno strumento «visuale» utile,
ad un primo approccio,
per
1. classificare
2. comprendere
3. ricordare

	Tipo di trasformazione	Semplice esempio grafico	Invarianti rispetto a quel tipo di trasformazione
vi è una progressiva perdita di proprietà invarianti partendo dalle isometrie per arrivare agli omeomorfismi	Omeomorfismo (trasformazioni del "foglio di gomma")		1. continuità
	Proiettività (esempio: prospettiva)		1. continuità 2. allineamento
	Affinità (esempio: assonometria)		1. continuità 2. allineamento 3. parallelismo
	Omotetia (esempio: zoomata)		1. continuità 2. allineamento 3. parallelismo 4. forma
	Isometria (esempio: traslazione)		1. continuità 2. allineamento 3. parallelismo 4. forma 5. distanza

ISOMETRIE
dal greco ἰσομετρία «uguaglianza di misura»

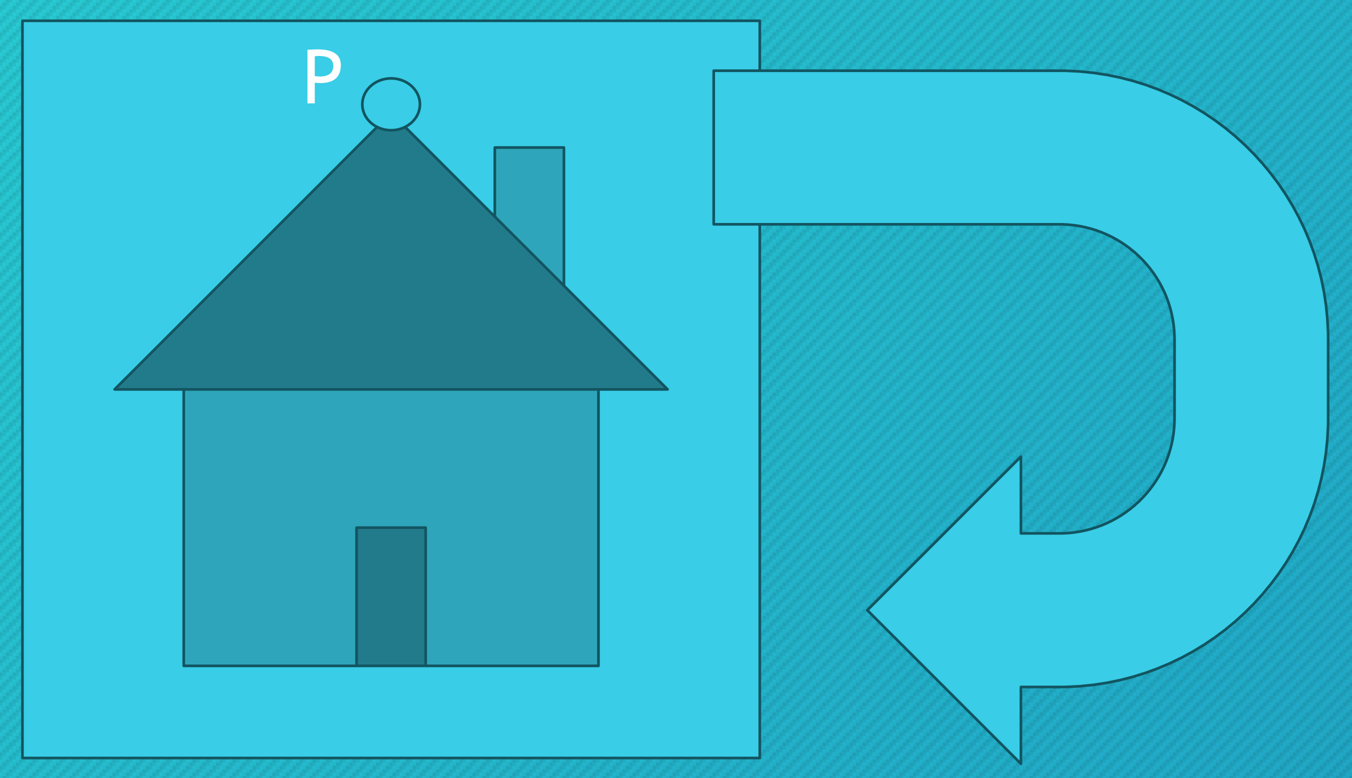
Le ISOMETRIE sono quelle trasformazioni che conservano tutte le proprietà delle figure tranne, in quasi tutti i casi, la posizione sul piano e, in alcuni casi, l'orientamento del piano stesso.

INVARIANTI:

- Distanza tra due punti
- Forma delle figure
- Misura degli angoli
- Parallelismo tra rette/segmenti
- Allineamento dei punti
- Continuità delle linee

TIPI DI ISOMETRIE - identità

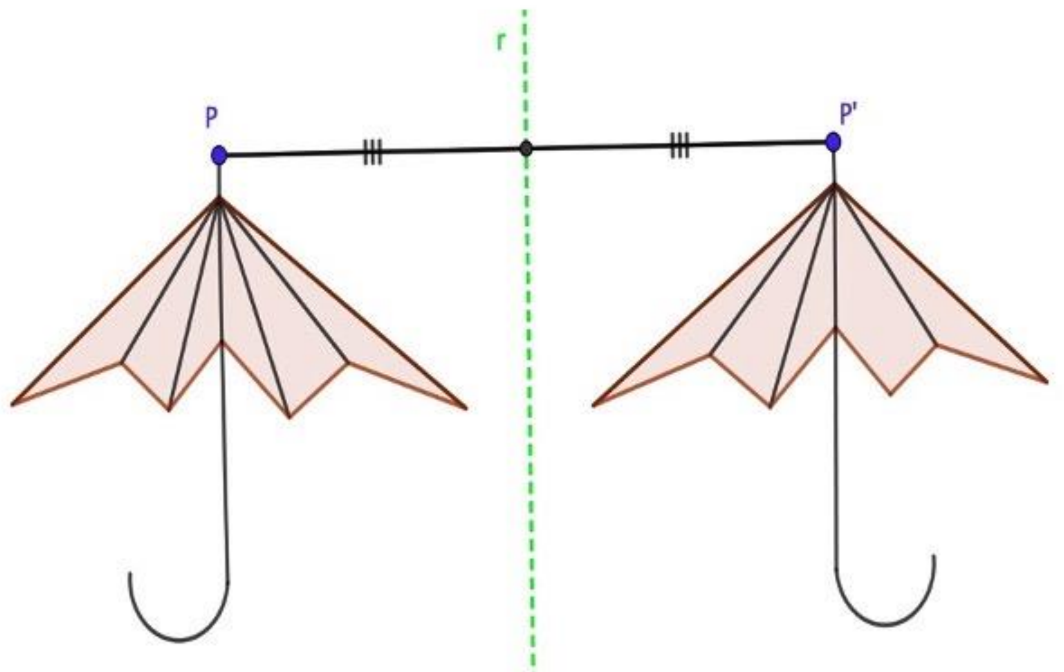
L'IDENTITA' mappa i punti del piano in loro stessi, dunque NON SPOSTA NULLA. Le figure conservano TUTTI gli invarianti



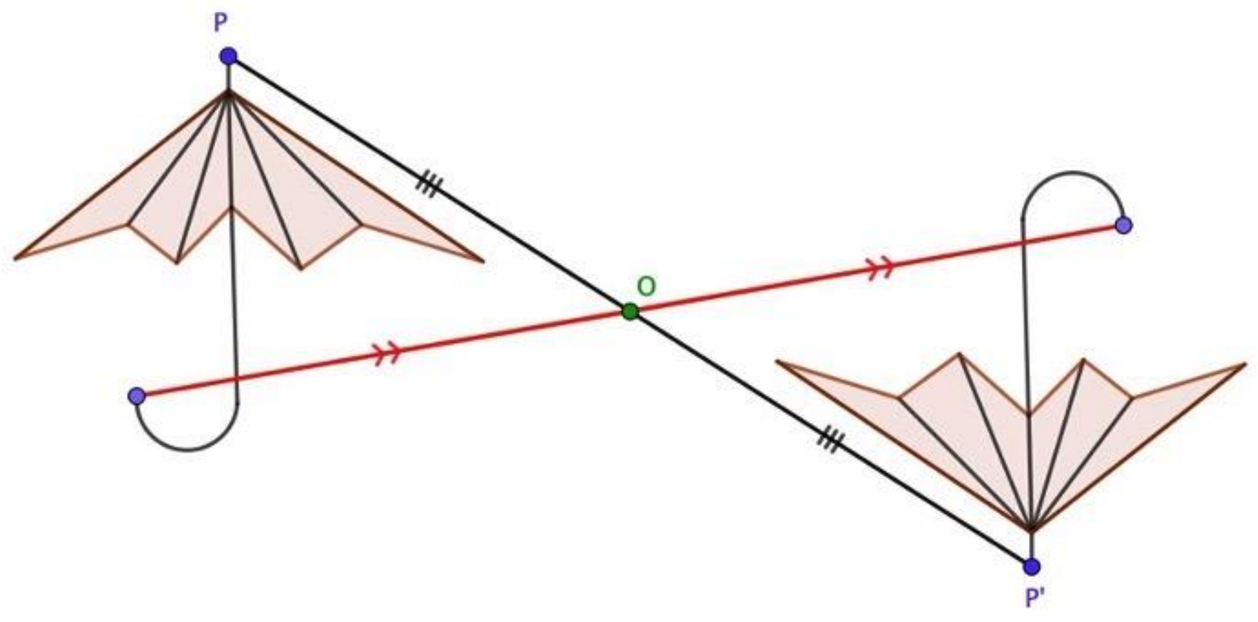
P viene mappato in P, la casetta nella casetta;
ogni punto è unito, ogni figura è unita, le proprietà delle figure restano invariate

$$\tau(P) = P$$

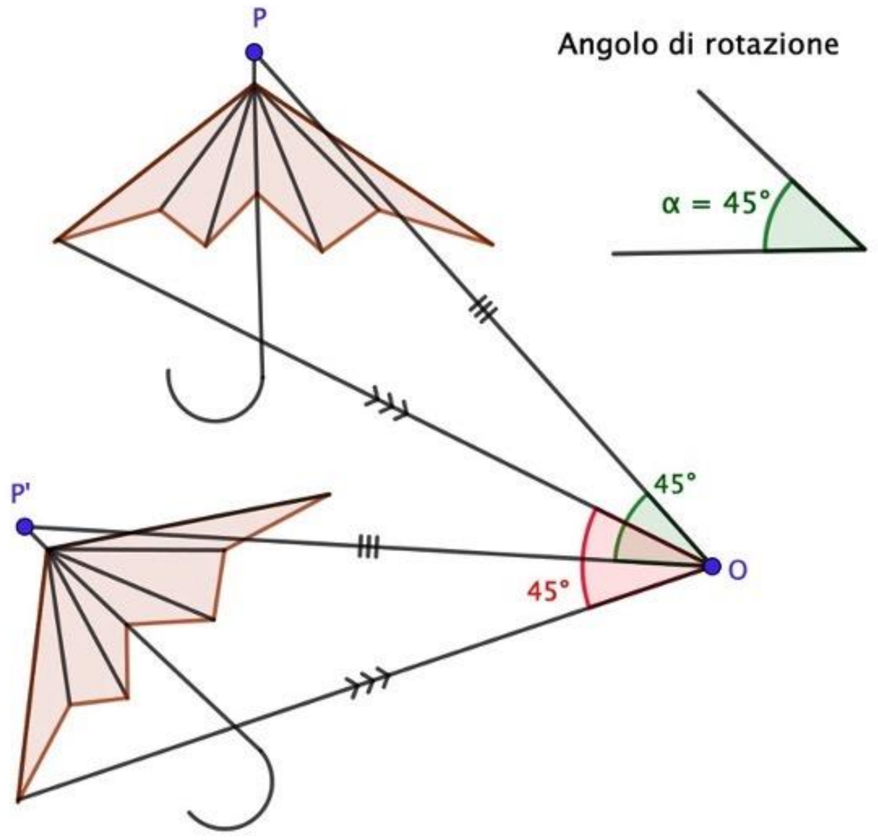
TIPI DI ISOMETRIE – simmetria assiale

definizione	punti e rette unite	trasformazione inversa	sistema algebrico per la trasformazione nel piano cartesiano
Simmetria assiale Data una retta r nel piano, la simmetria assiale di asse r , indicata con s_r, è la trasformazione geometrica che ad ogni punto P del piano associa il punto P' nel sempipiano opposto rispetto alla retta r, in modo tale che: • $PP' \perp r$ • Il punto medio di PP' appartenga a r. 	Tutti e soli i punti uniti rispetto alla trasformazione sono i punti della retta r, detta anche “asse di simmetria” Tutte e sole le rette unite rispetto alla trasformazione sono le rette perpendicolari a r	La trasformazione inversa di s_r è la simmetria stessa; la simmetria assiale composta con sé stessa è dunque l’identità: $s_r \circ s_r = i$	Simmetria rispetto all’asse delle ordinate $x = k$: $\begin{cases} x' = 2k - x \\ y' = y \end{cases}$ Simmetria rispetto all’asse delle ascisse $y = k$: $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2k - y \end{cases}$ Simmetria rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante $y = x$: $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

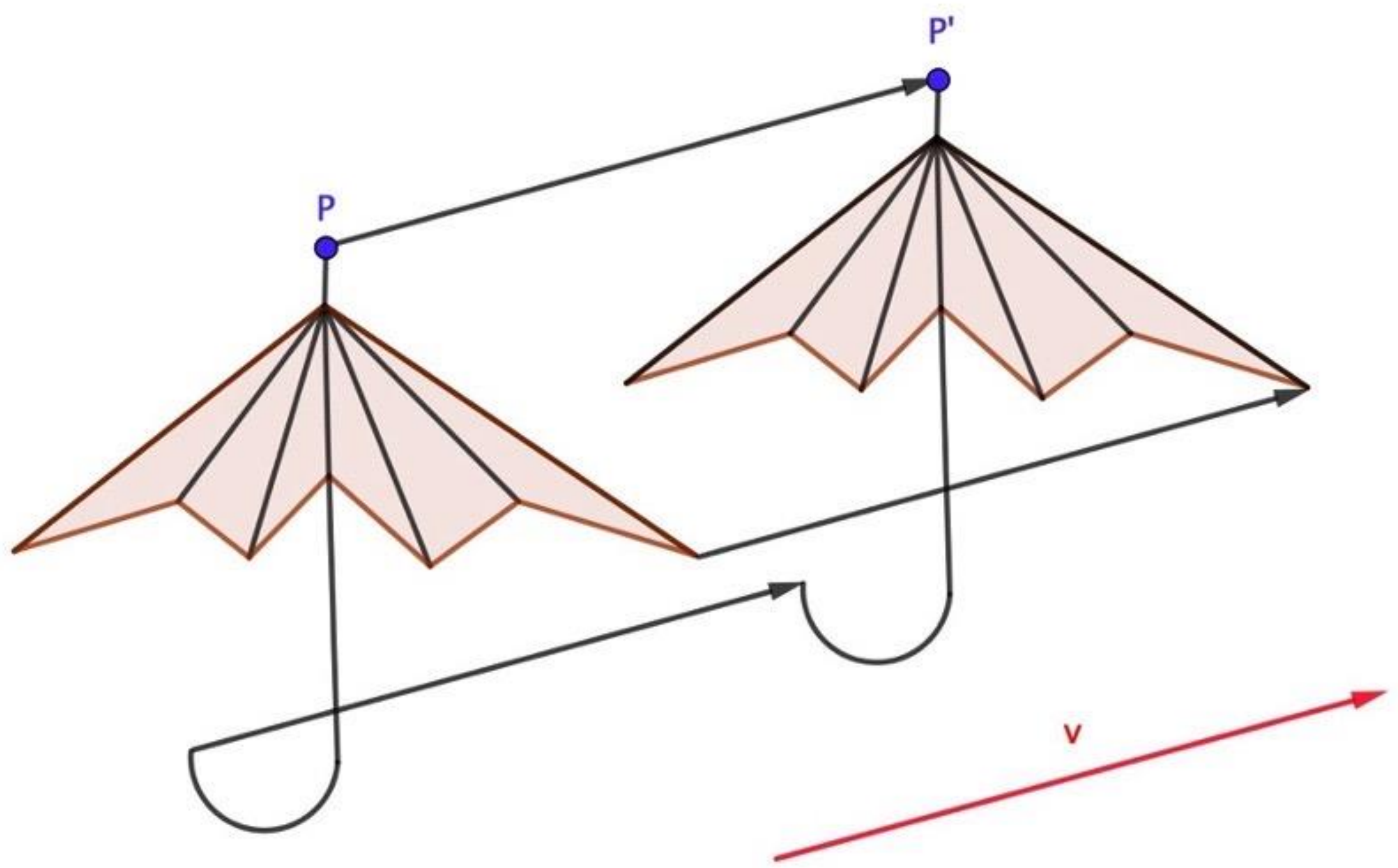
TIPI DI ISOMETRIE – simmetria centrale

definizione	punti e rette unite	trasformazione inversa	sistema algebrico per la trasformazione nel piano cartesiano
Simmetria centrale Dato un punto O nel piano, la simmetria centrale di centro O , indicata con s_O, è la trasformazione geometrica che ad ogni punto P del piano associa il punto P' della retta OP, in modo tale che: • $OP \cong OP'$ (O sia cioè il punto medio di PP').  	L'unico punto unito rispetto alla trasformazione è il punto O, detto anche "centro di simmetria" Tutte e sole le rette unite rispetto alla trasformazione sono le rette passanti per O	La trasformazione inversa di s_O è la simmetria stessa; la simmetria centrale composta con sé stessa è dunque l'identità: $s_O \circ s_O = i$	Simmetria centrale di centro $O(x_O;\ y_O)$: $\begin{cases} x' = 2x_O - x \\ y' = 2y_O - y \end{cases}$

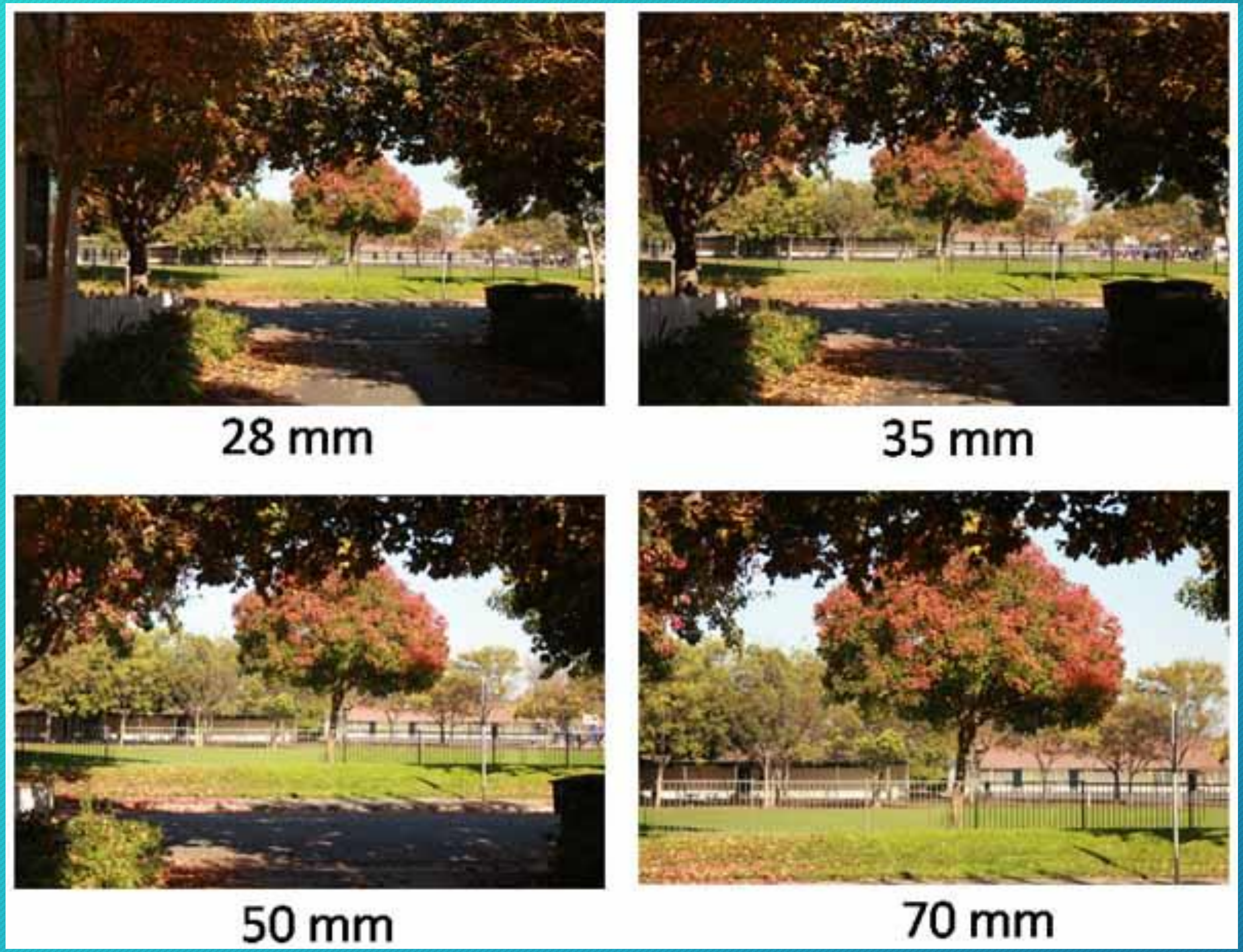
TIPI DI ISOMETRIE – rotazione

definizione	punti e rette unite	trasformazione inversa	sistema algebrico per la trasformazione nel piano cartesiano
Rotazione Dati un punto O nel piano e un angolo orientato α, la rotazione di centro O e angolo α, indicata con $r_{(O,\alpha)}$, è la trasformazione geometrica che ad ogni punto P del piano associa il punto P' in modo tale che: • $OP \cong OP'$ • $\angle POP' \cong \alpha$, essendo gli angoli anche orientati nello stesso verso  	L'unico punto unito rispetto alla trasformazione di **angolo non nullo e non giro (o multiplo)** è il punto O, detto anche "centro di rotazione"; in tal caso sono anche unite tutte le rette passanti per il centro ma **solo se l'angolo è piatto** Una rotazione di angolo nullo o giro (o multiplo), rispetto a qualsiasi centro, è l'identità, per cui tutti i punti sono uniti così come tutte le figure del piano	La trasformazione inversa di $r_{(O,\alpha)}$ è la rotazione: $r_{(O,-\alpha)}$	Simmetria centrale di centro $O(x_O;\ y_O)$ e di angolo α: $\begin{cases} x' = x_0 + (x - x_0)\cos\alpha - (y - y_0)\sin\alpha \\ y' = y_0 + (x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha \end{cases}$ Un angolo α positivo indica una rotazione antioraria; un angolo negativo, una rotazione oraria.

TIPI DI ISOMETRIE – traslazione

definizione	punti e rette unite	trasformazione inversa	sistema algebrico per la trasformazione nel piano cartesiano
Traslazione Dato un vettore $\vec{v}$ nel piano, la traslazione di vettore $\vec{v}$, indicata con $t_{\vec{v}}$, è la trasformazione geometrica che ad ogni punto P del piano associa il punto P' in modo tale che: • $\vec{v} = \overrightarrow{PP'}$ 	Se il vettore è nullo, tutti i punti sono uniti, altrimenti non ve ne è alcuno Sono unite tutte le rette aventi la stessa direzione del vettore	La trasformazione inversa di $t_{\vec{v}}$ è la traslazione: $t_{(-\vec{v})}$	Dato il vettore $\vec{v}(v_x;\ v_y)$: $\begin{cases} x' = x + v_x \\ y' = y + v_y \end{cases}$

OMOTETIA – esempio pratico



Osservate queste zoomate di una stessa scena, che mantengono fisso il centro dell’immagine sull’incrocio delle diagonali del rettangolo:

state eseguendo delle omotetie con centro C nel centro dell’immagine e fattore k rispettivamente circa uguale a quello che, con la macchina fotografica, indicate con «x 1», «x 1.5», «x 2», «x 3»

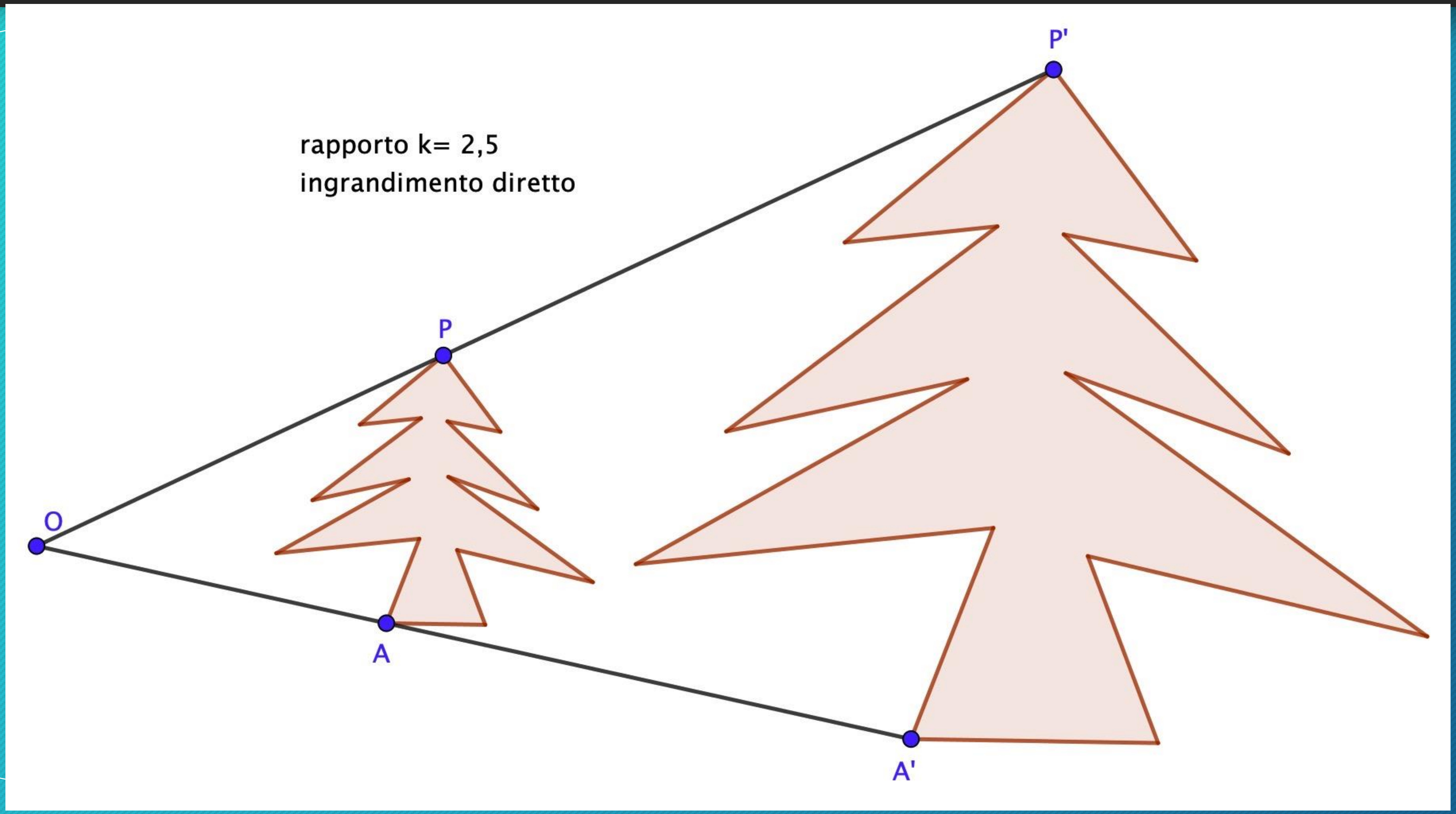
OMOTETIE

INVARIANTI:
- ~~Distanza tra due punti~~
- Forma delle figure
- Misura degli angoli
- Parallelismo tra rette/segmenti
- Allineamento dei punti
- Continuità delle linee

definizione	punti e rette unite	composizione di omotetie	sistema algebrico per la trasformazione nel piano cartesiano
Omotetia Dato un punto O nel piano, detto centro dell'omotetia, l'omotetia di centro O e fattore k reale non nullo, indicata con $\tau_{(O,k)}$, è la trasformazione geometrica che ad ogni punto P del piano associa il punto P' in modo tale che: • $\frac{\overrightarrow{OP'}}{\overrightarrow{OP}} = k$ • P' appartenga alla retta OP Graficamente le situazioni sono varie a seconda di $\lvert k \rvert$ (alle slide successive)	L'unico punto unito è il centro Sono unite tutte le rette passanti per il centro	La composizione di due omotetie di fattori rispettivamente k e h, con lo stesso centro O è ancora un'omotetia di rapporto $k \cdot h$	Dato il centro $O(0;0)$ e il fattore k si ha: $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$ Dato il centro $O(x_O; y_O)$ e il fattore k si ha: $\begin{cases} x' = x_O + kx \\ y' = y_O + ky \end{cases}$

OMOTETIE – dirette

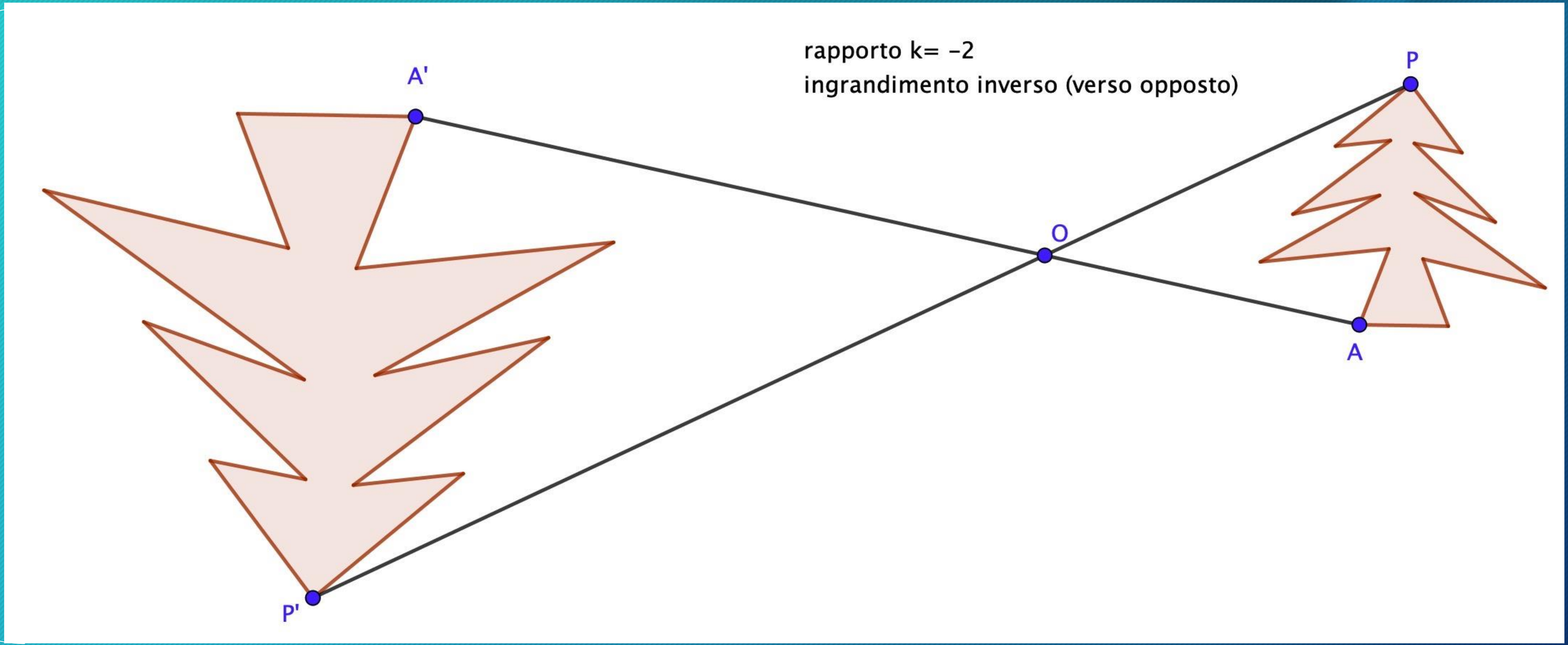
k>0



in generale dirette se   k > 0 (k positivo): figura trasformata dalla stessa parte rispetto al centro

OMOTETIE – inverse

k<0

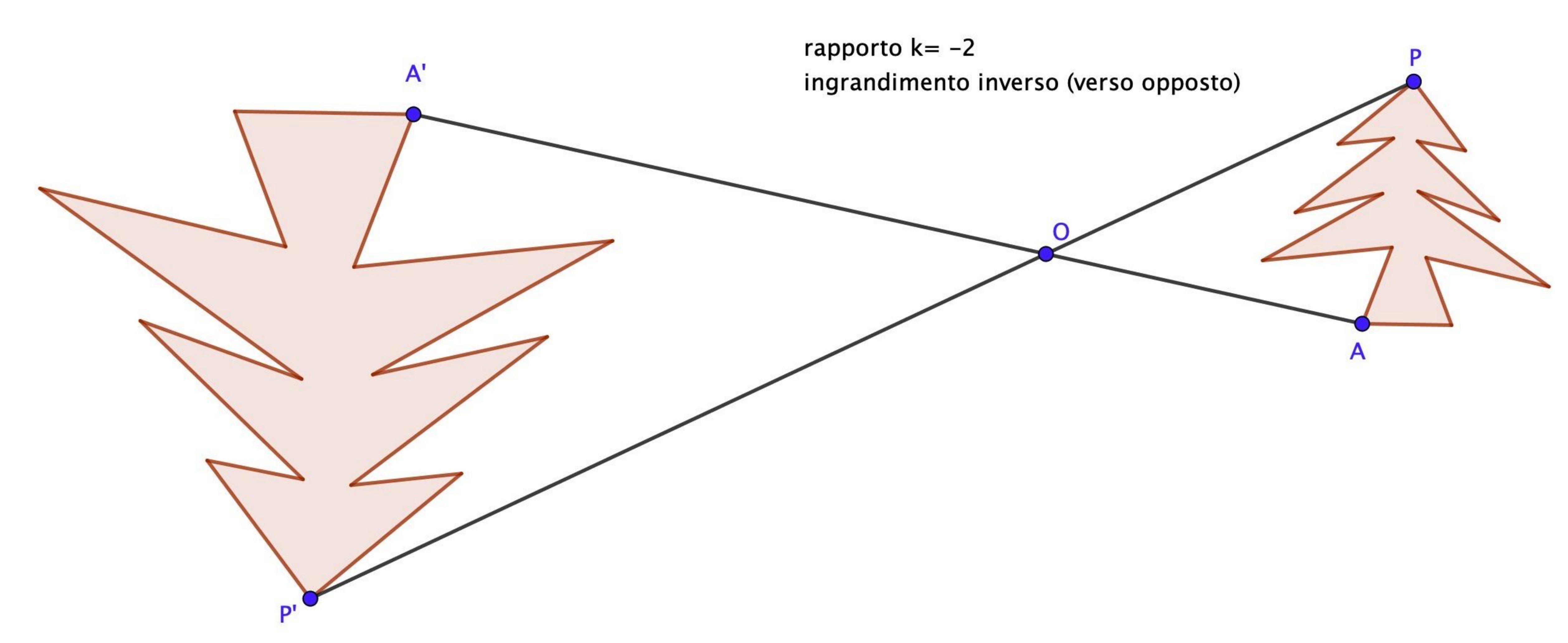


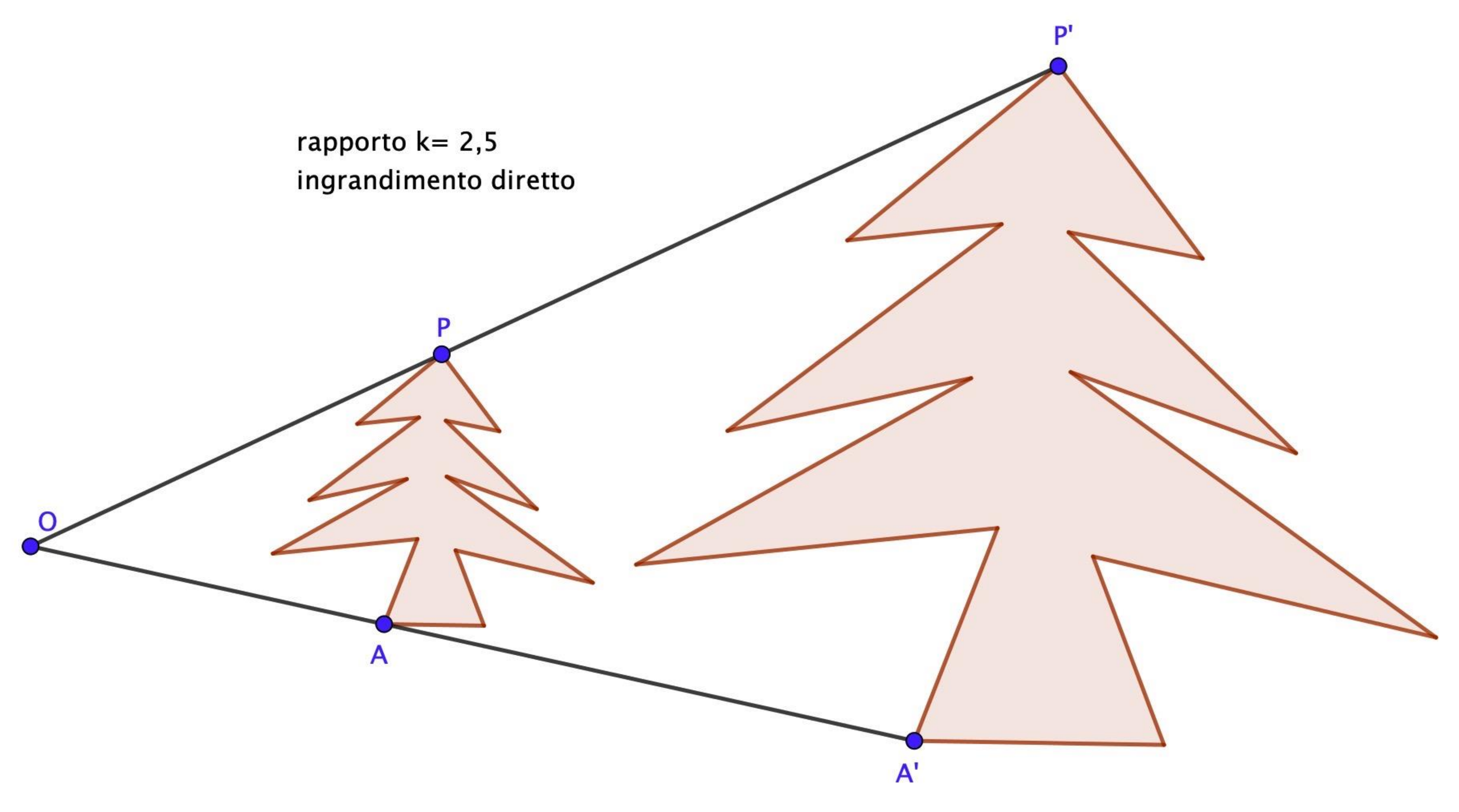
in generale inverse se k < 0 (k negativo): figura trasformata dalla parte opposta rispetto al centro

OMOTETIE – ingrandimenti

$k > +1$

$k < -1$

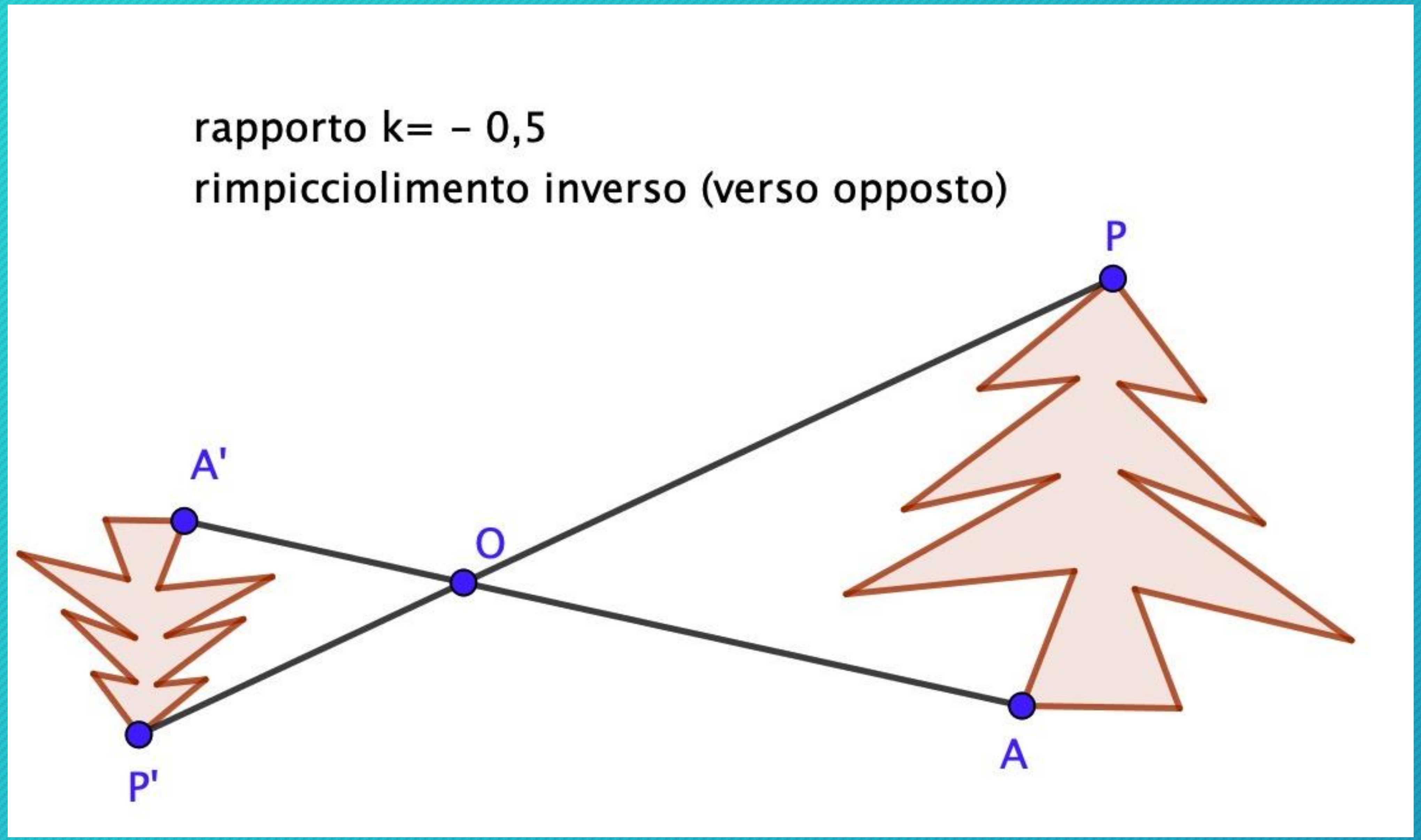




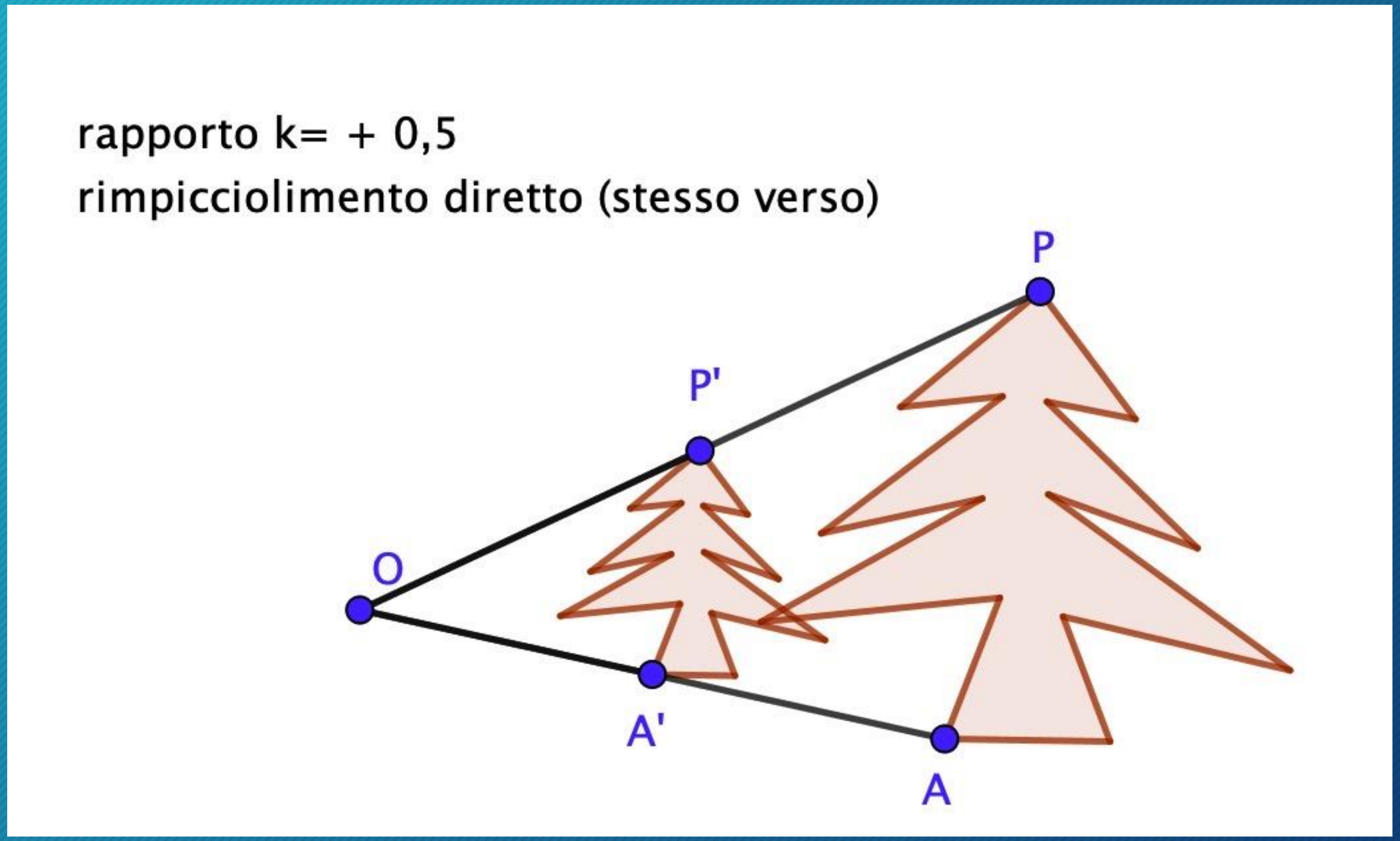
in generale ingrandimento se: $|k| > 1$

OMOTETIE – rimpicciolimento

$-1 < k < 0$



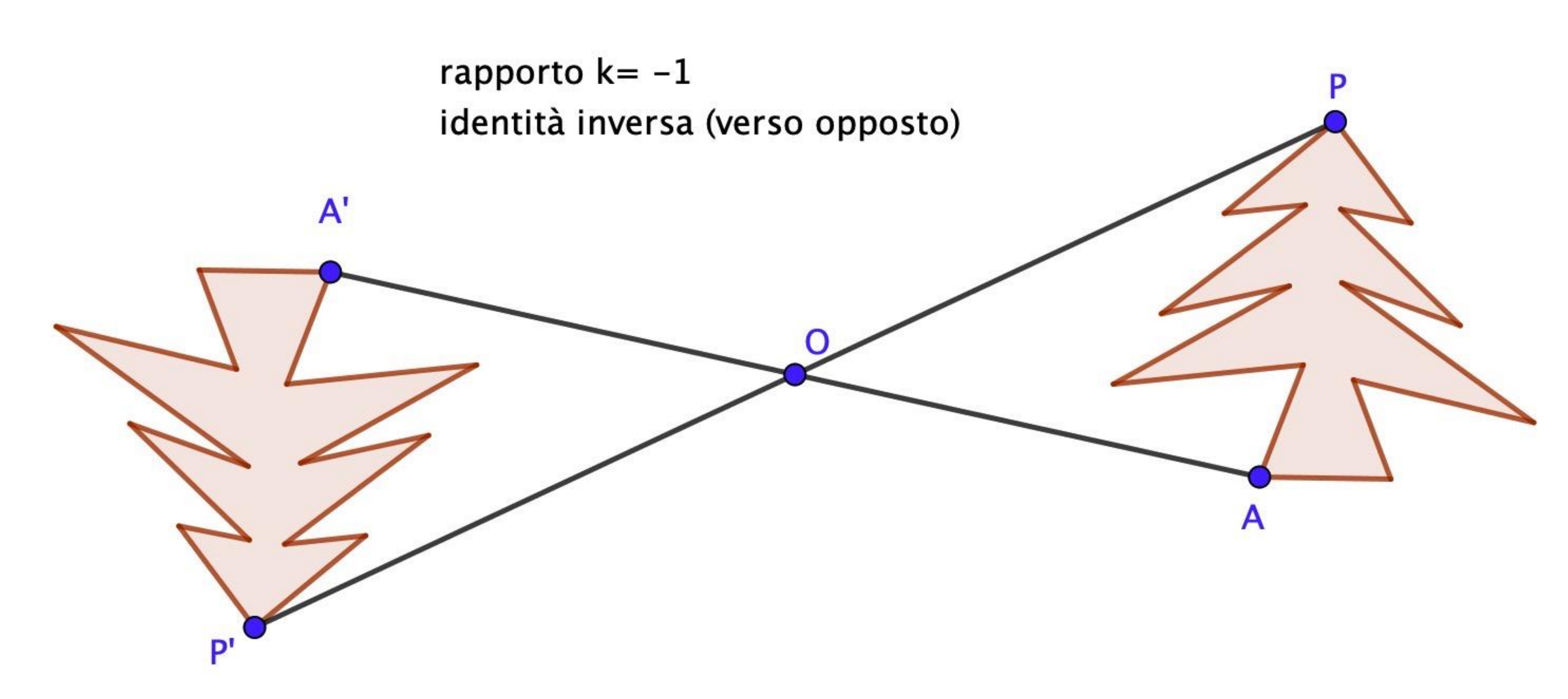
$0 < k < +1$



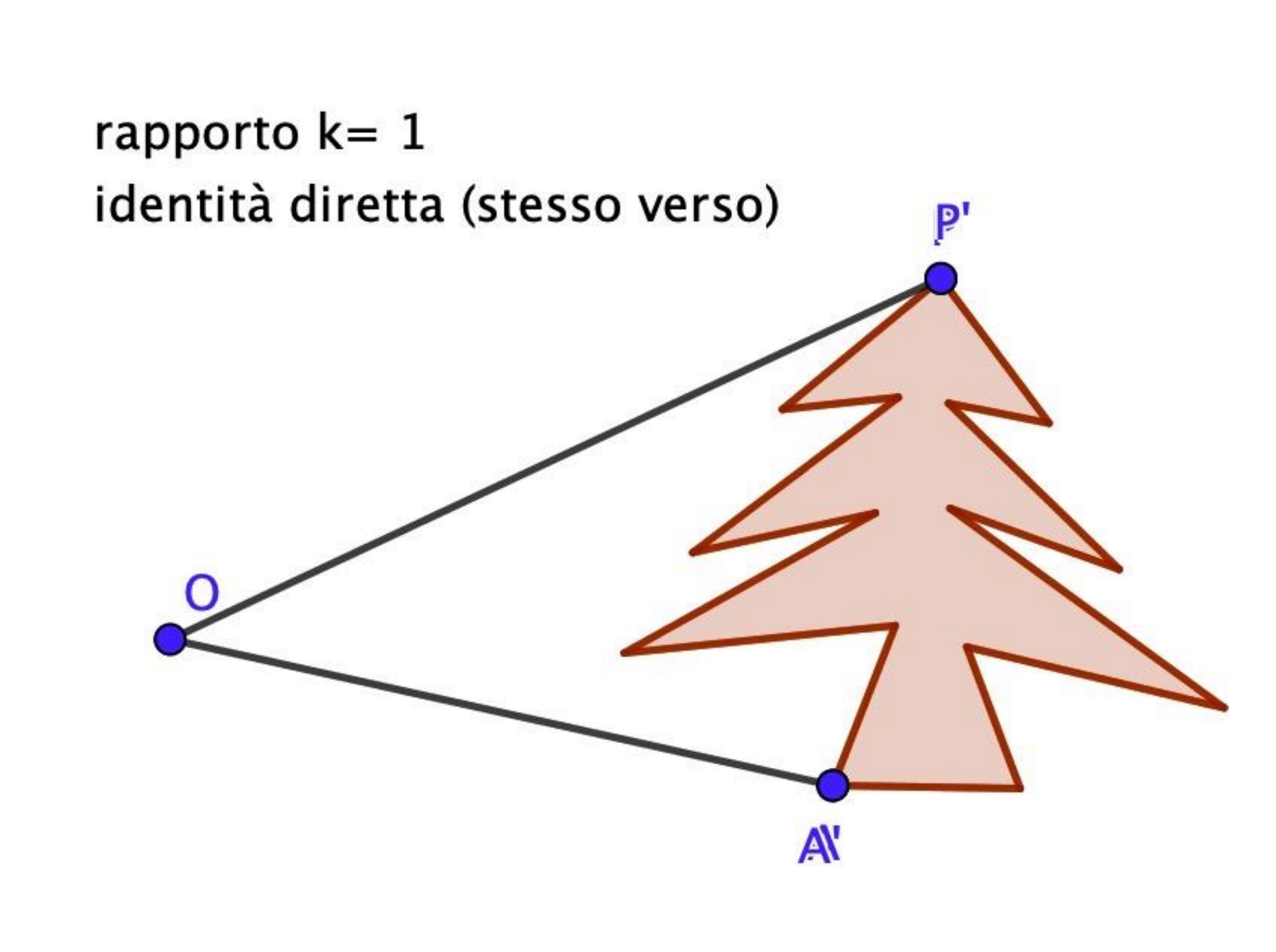
in generale rimpicciolimento se: $0 < |k| < 1$

OMOTETIE – identità

k = - 1 simmetria centrale di centro O

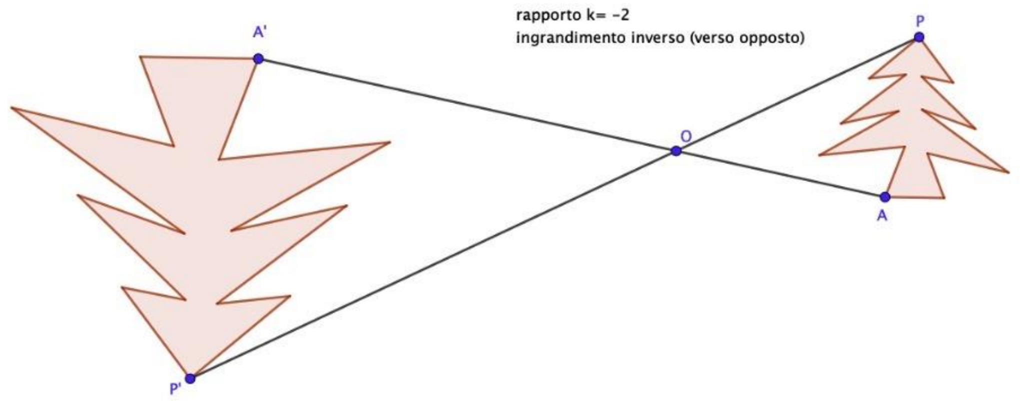
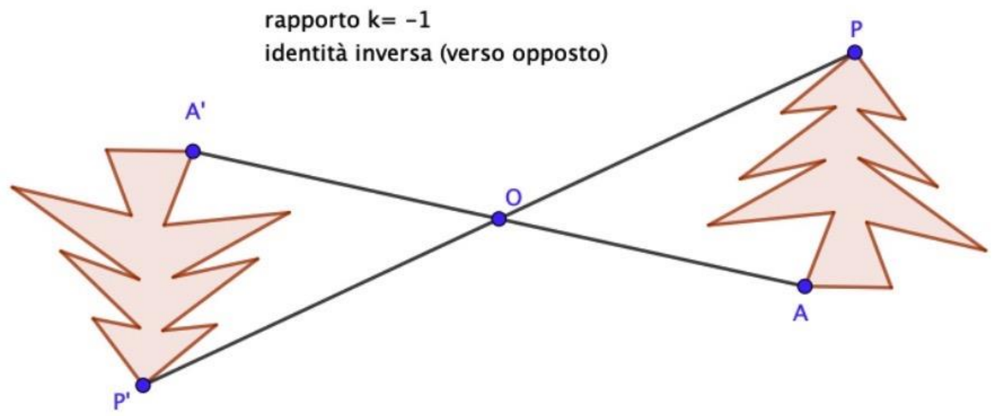
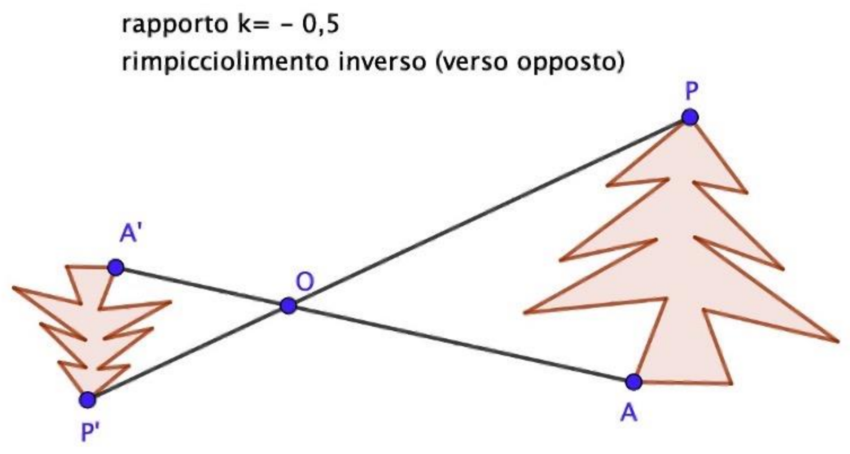
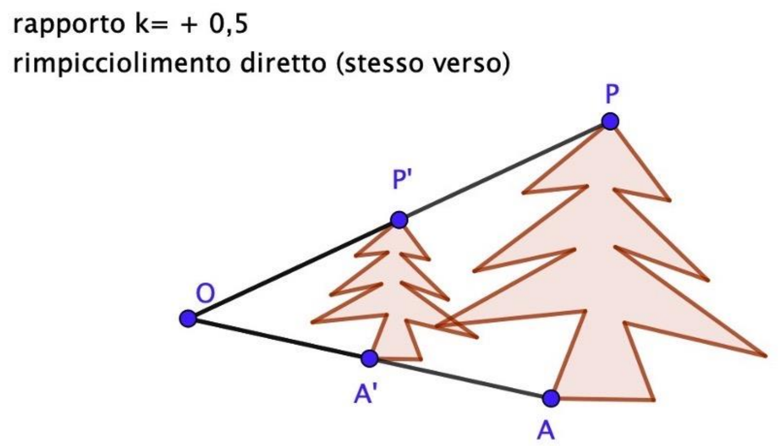
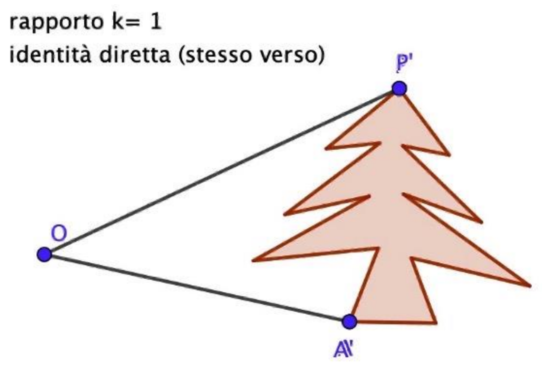
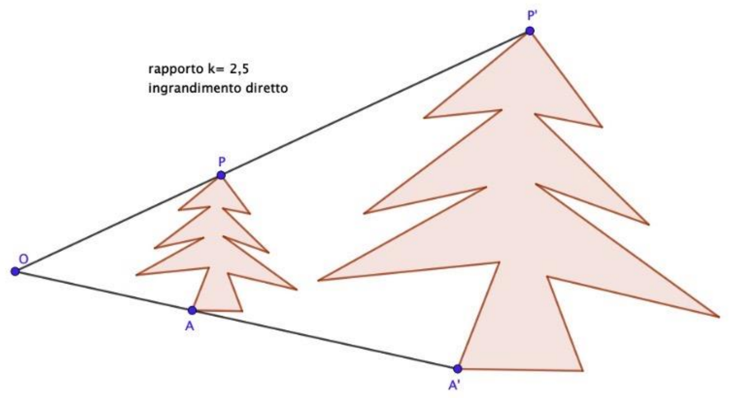


k = +1 identità

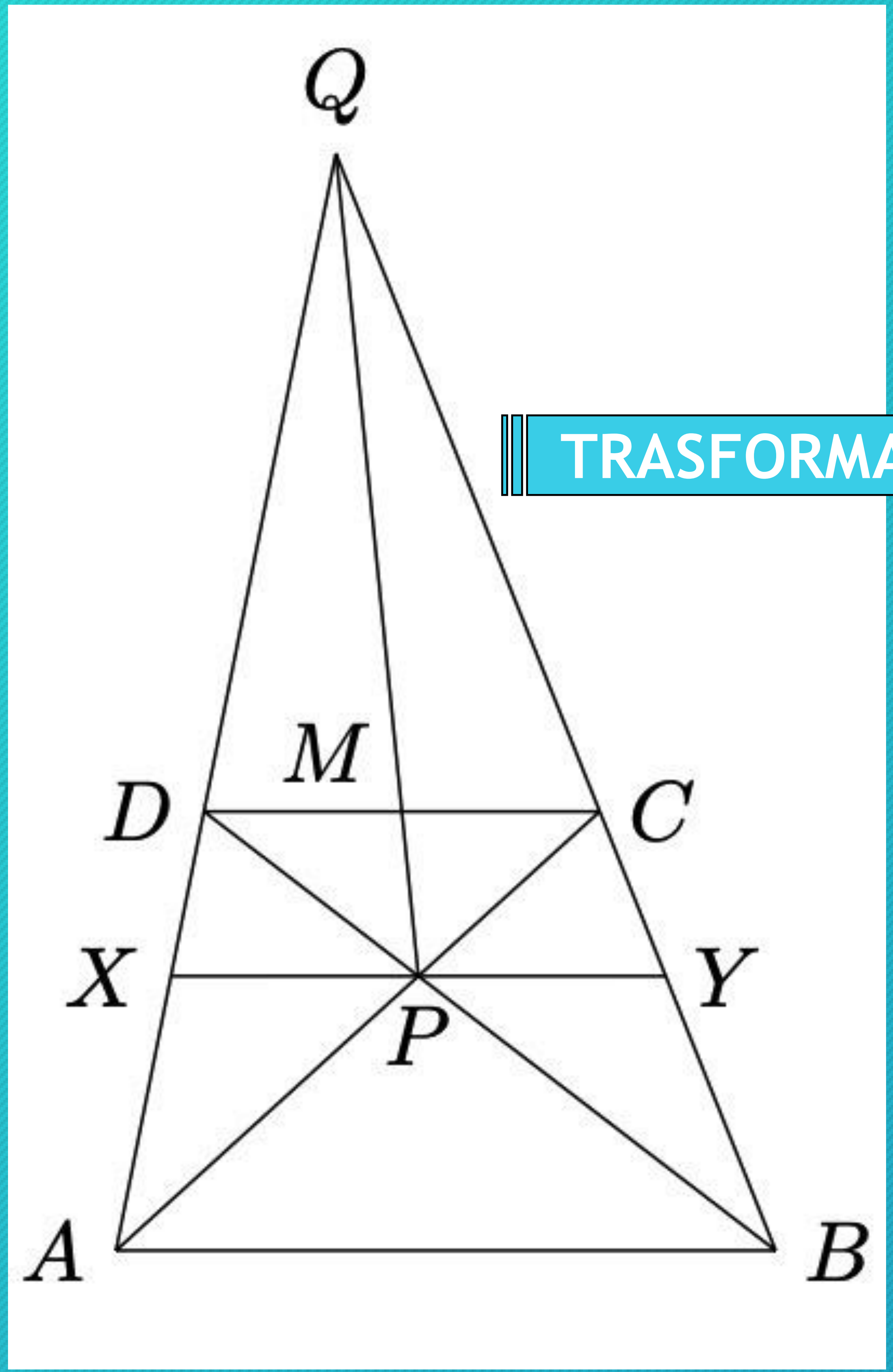


in generale se isometria: $|k| = 1$

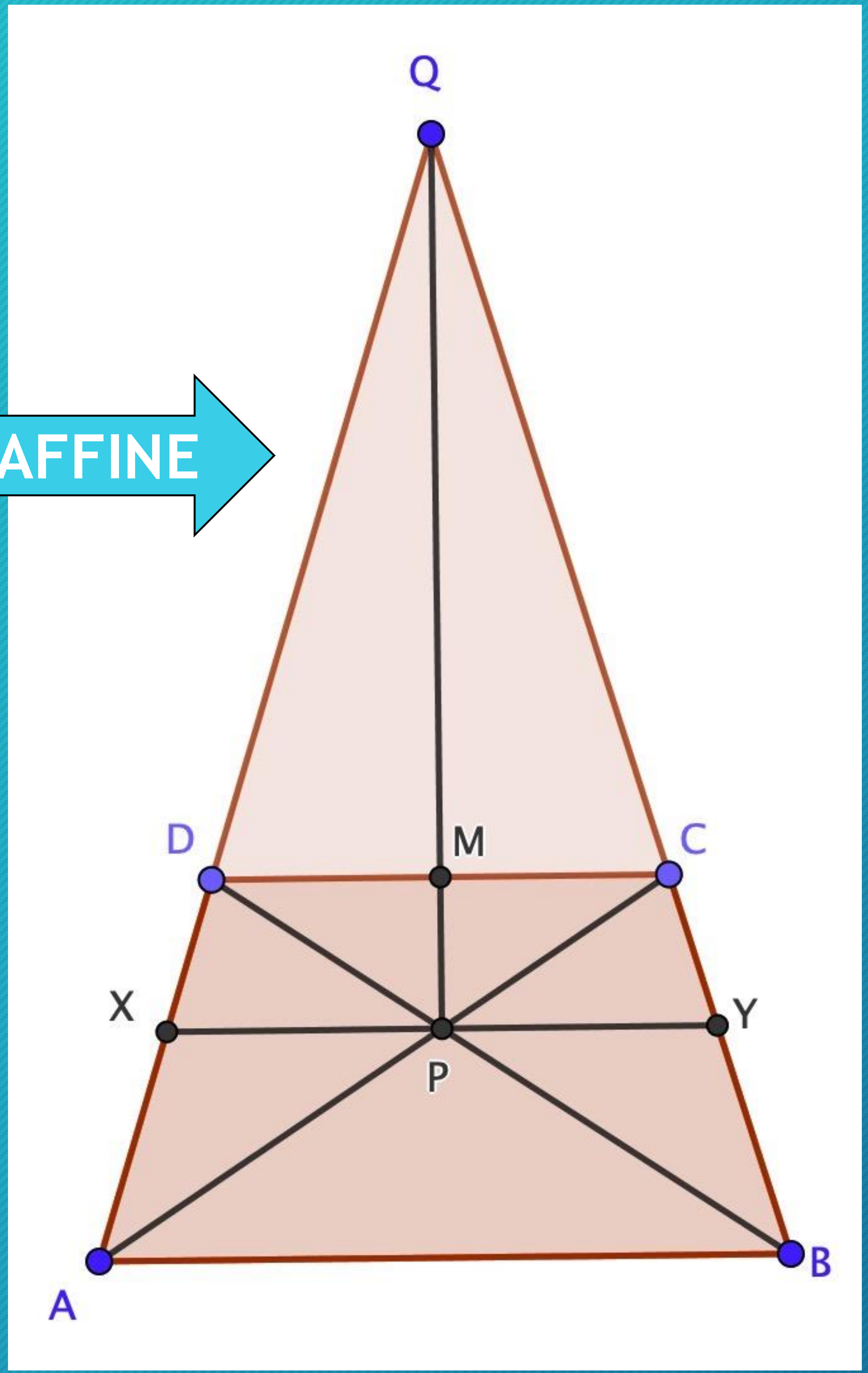
OMOTETIE – riassumendo

$\boldsymbol{k}$	**diretta / inversa / caso particolare**	**ingrandimento / congruenza / rimpicciolimento**	**esempio**
$k < -1$	inversa	ingrandimento	
$k = -1$	simmetria centrale	congruenza	
$-1 < k < 0$	inversa	rimpicciolimento	
$k = 0$	non esiste		
$0 < k < +1$	diretta	rimpicciolimento	
$k = +1$	identità	congruenza	
$k > +1$	diretta	ingrandimento	

AFFINITA' – esempio e invarianti



TRASFORMAZIONE AFFINE

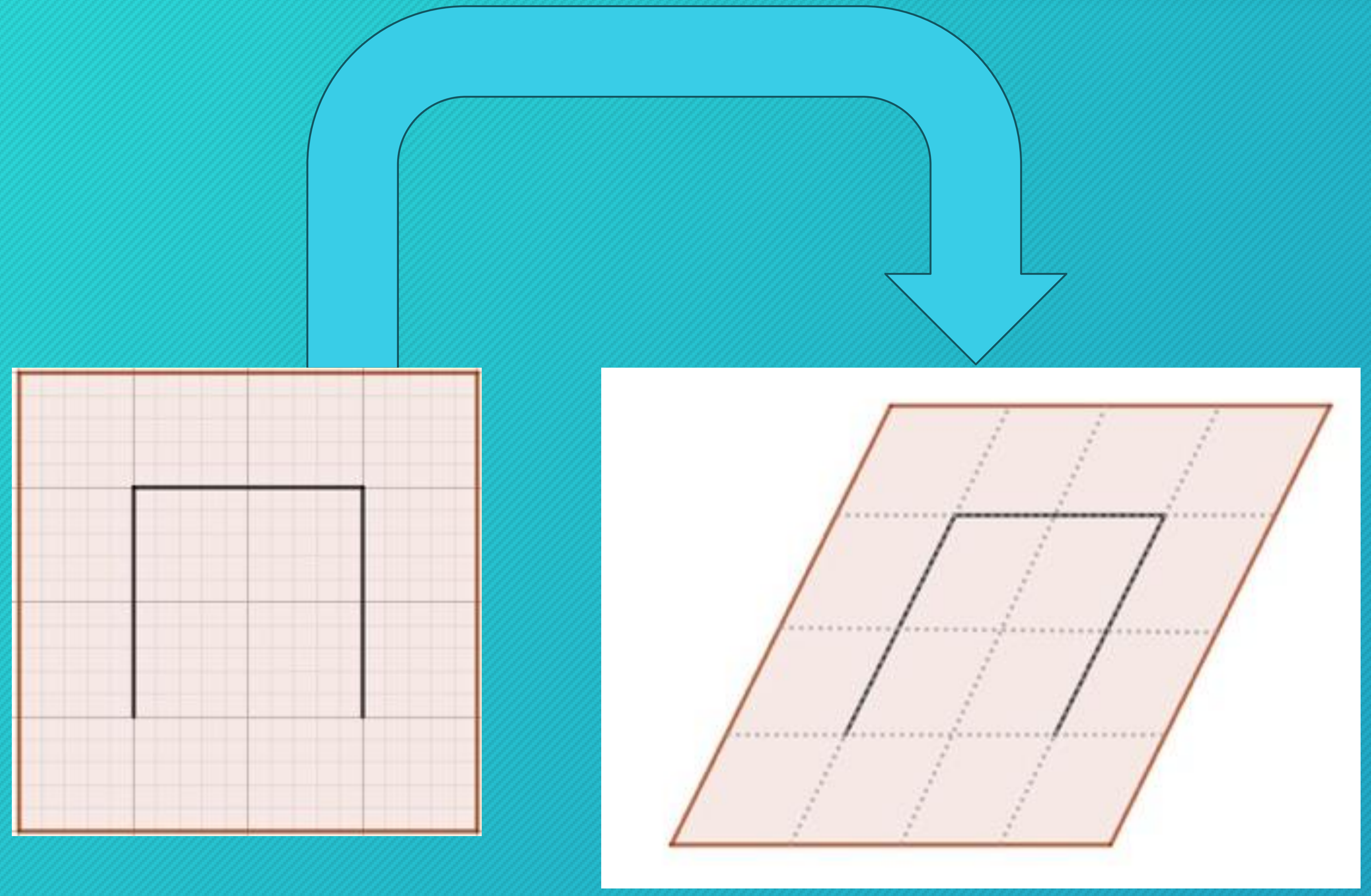


INVARIANTI:

- ~~Distanza tra due punti~~
- ~~Forma delle figure~~
- ~~Misura degli angoli~~
- Parallelismo tra rette/segmenti
- Allineamento dei punti
- Continuità delle linee

IMPORTANTE: Le AFFINITA' conservano anche i rapporti tra i segmenti corrispondenti sulle stesse rette

ESEMPIO DI AFFINITA' - assonometria

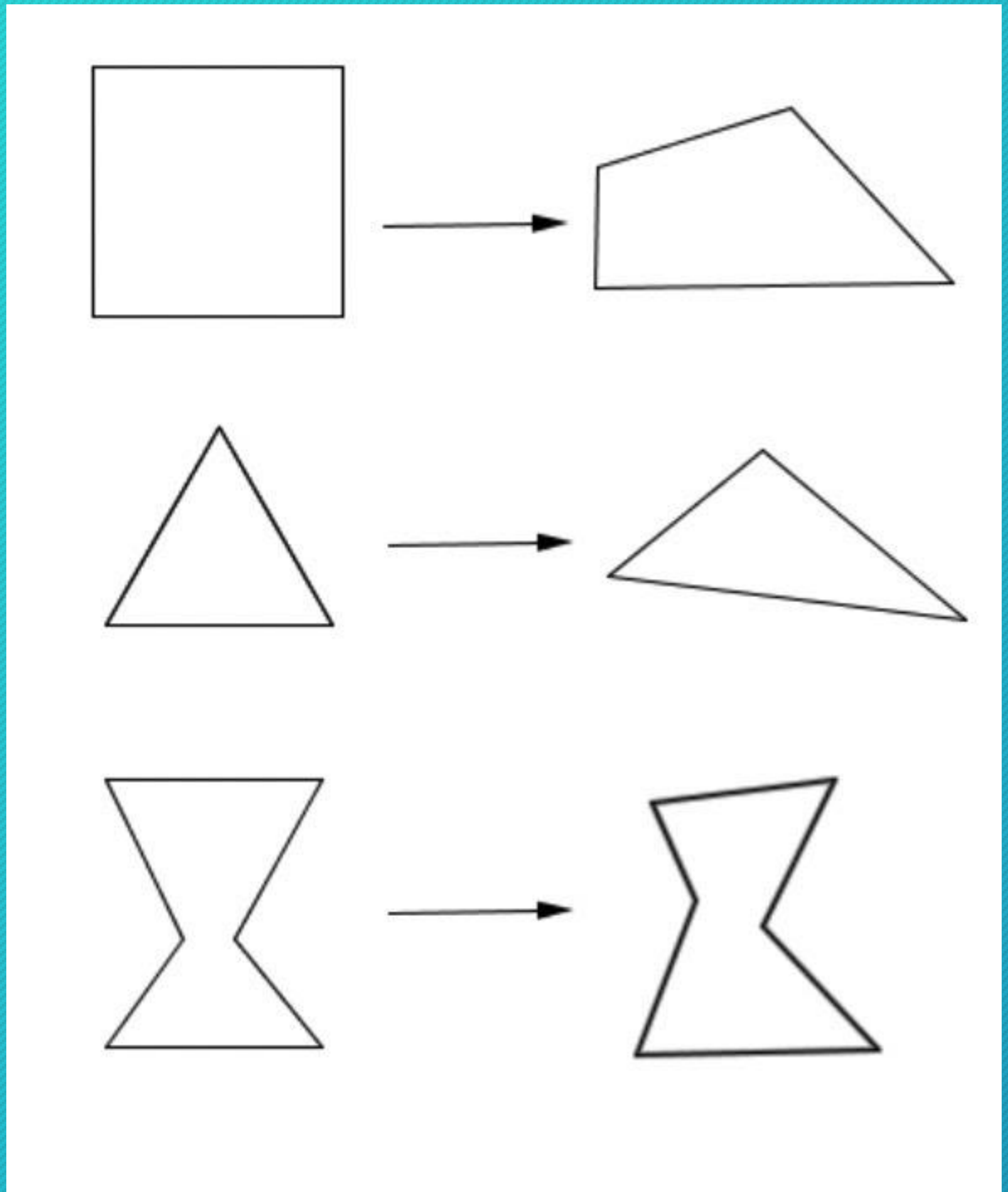


Un'assonometria piana trasforma la figura in una affine.

Come potete osservare:

- Rette/segmenti paralleli restano tali
- Punti che erano allineati restano allineati
- Linee continue restano continue
- Abbiamo invece perso la forma originaria e la misura degli angoli e dei segmenti

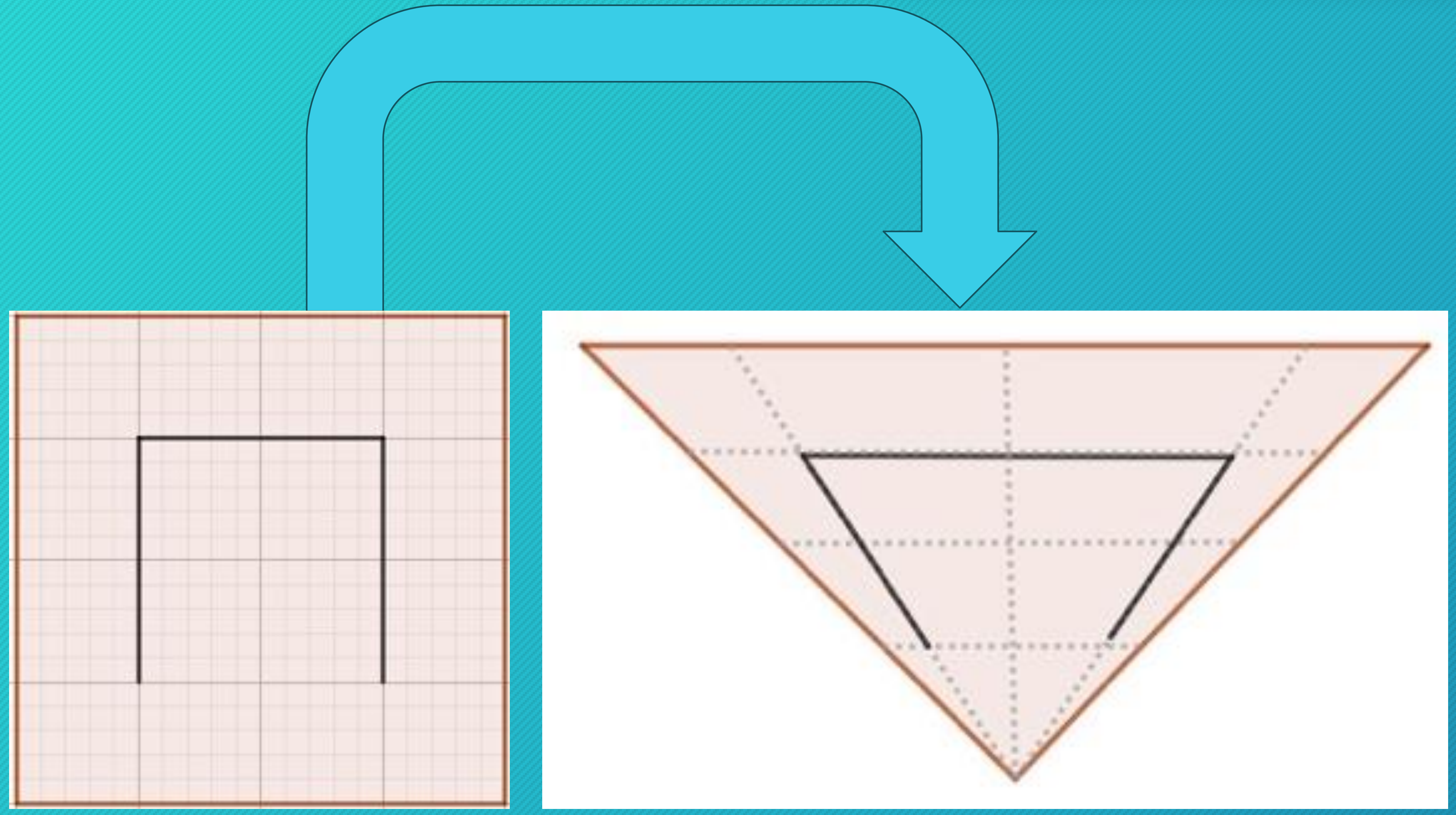
PROIETTIVITA' – esempio e invarianti



INVARIANTI:

- ~~Distanza tra due punti~~
- ~~Forma delle figure~~
- ~~Misura degli angoli~~
- ~~Parallelismo tra rette/segmenti~~
- Allineamento dei punti
- Continuità delle linee

ESEMPIO DI PROIETTIVITA' – prospettiva

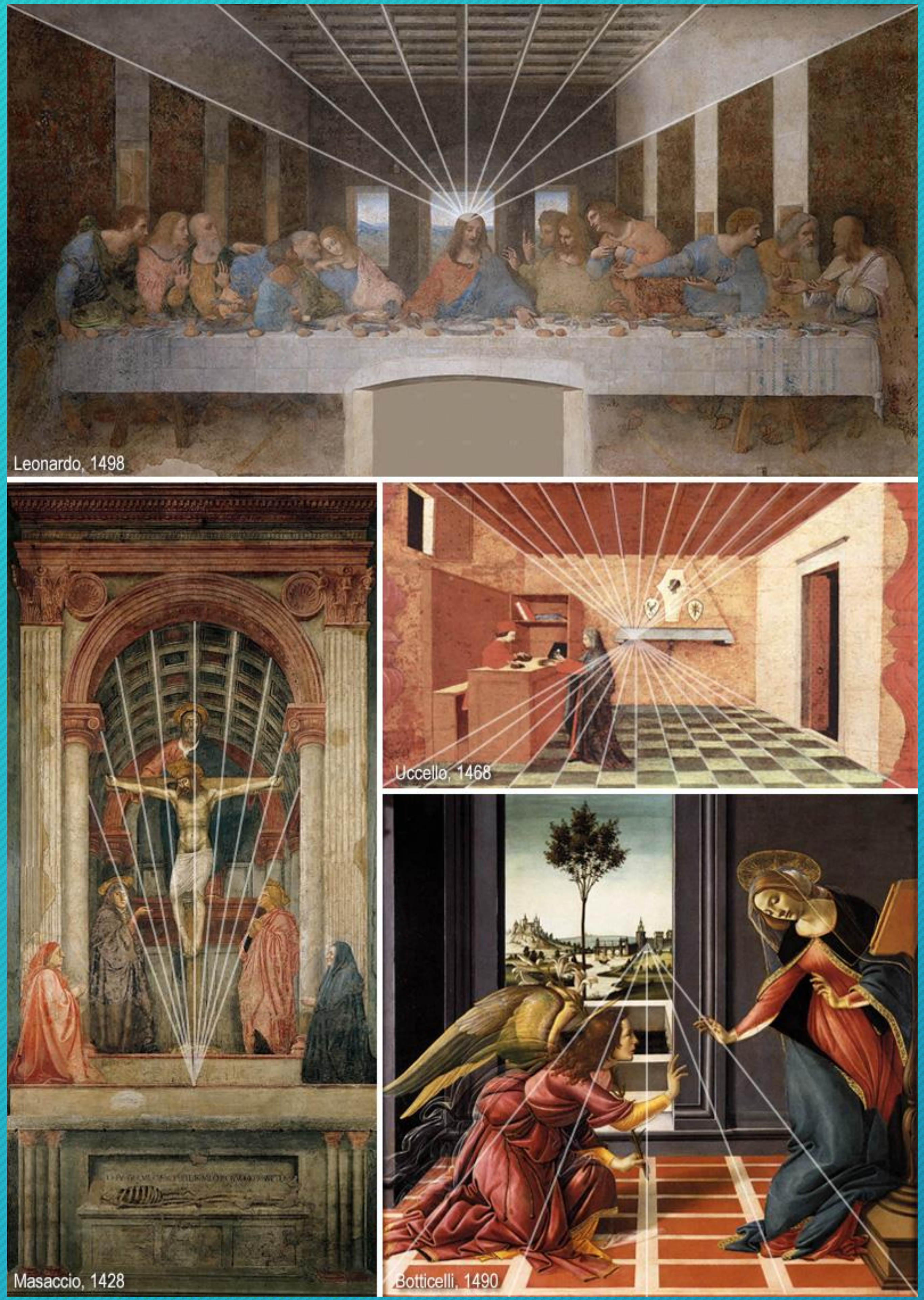


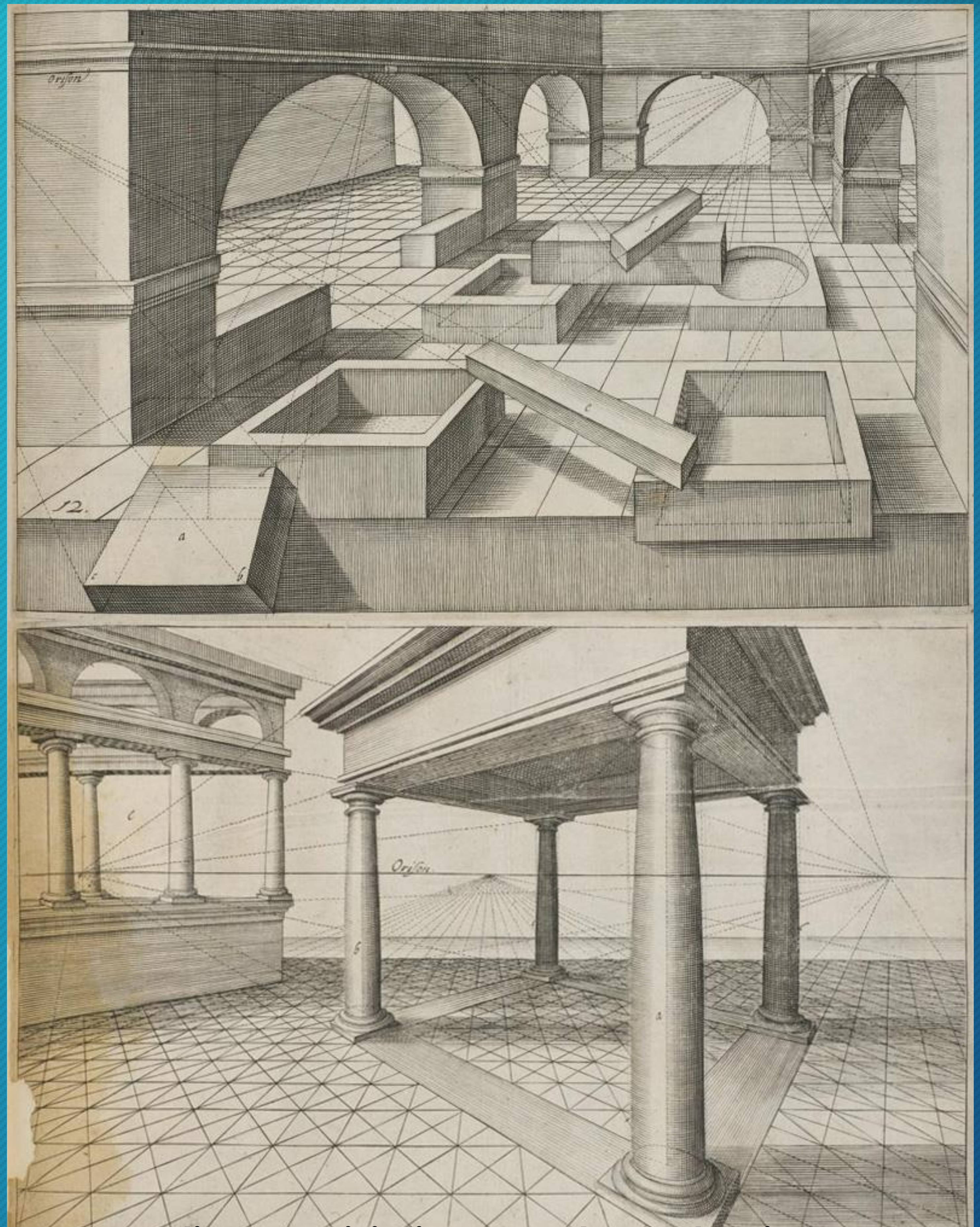
Una **<u>prospettiva piana</u>** trasforma la figura in una proiettiva.

Come potete osservare:

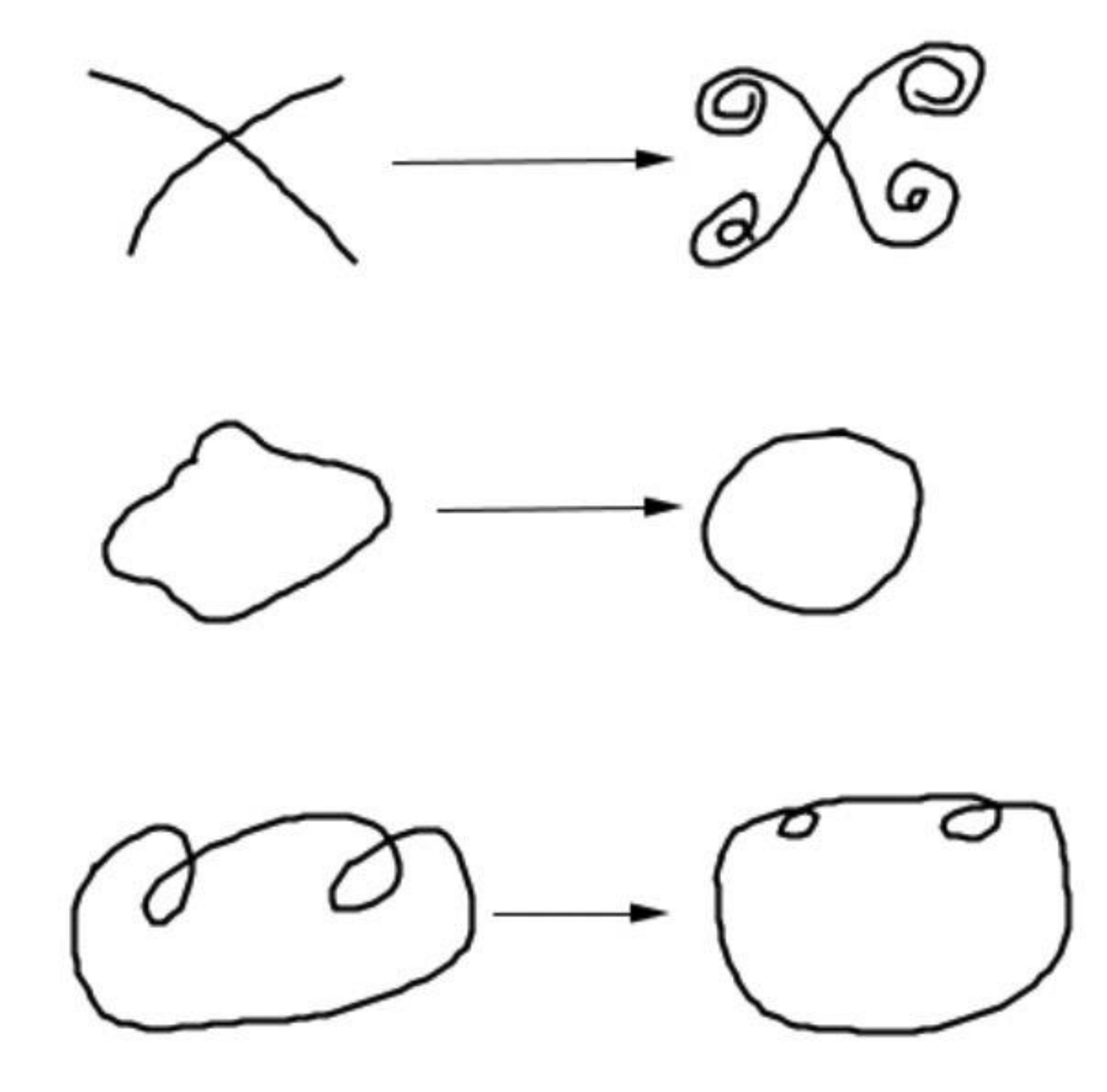
- Rette/segmenti paralleli non restano più necessariamente tali
- Punti che erano allineati restano allineati
- Linee continue restano continue
- Abbiamo invece perso la forma originaria e la misura degli angoli e dei segmenti

ESEMPI DI PROIETTIVITA' – prospettive celebri




Studi prospettici di Hans Vredeman de Vries

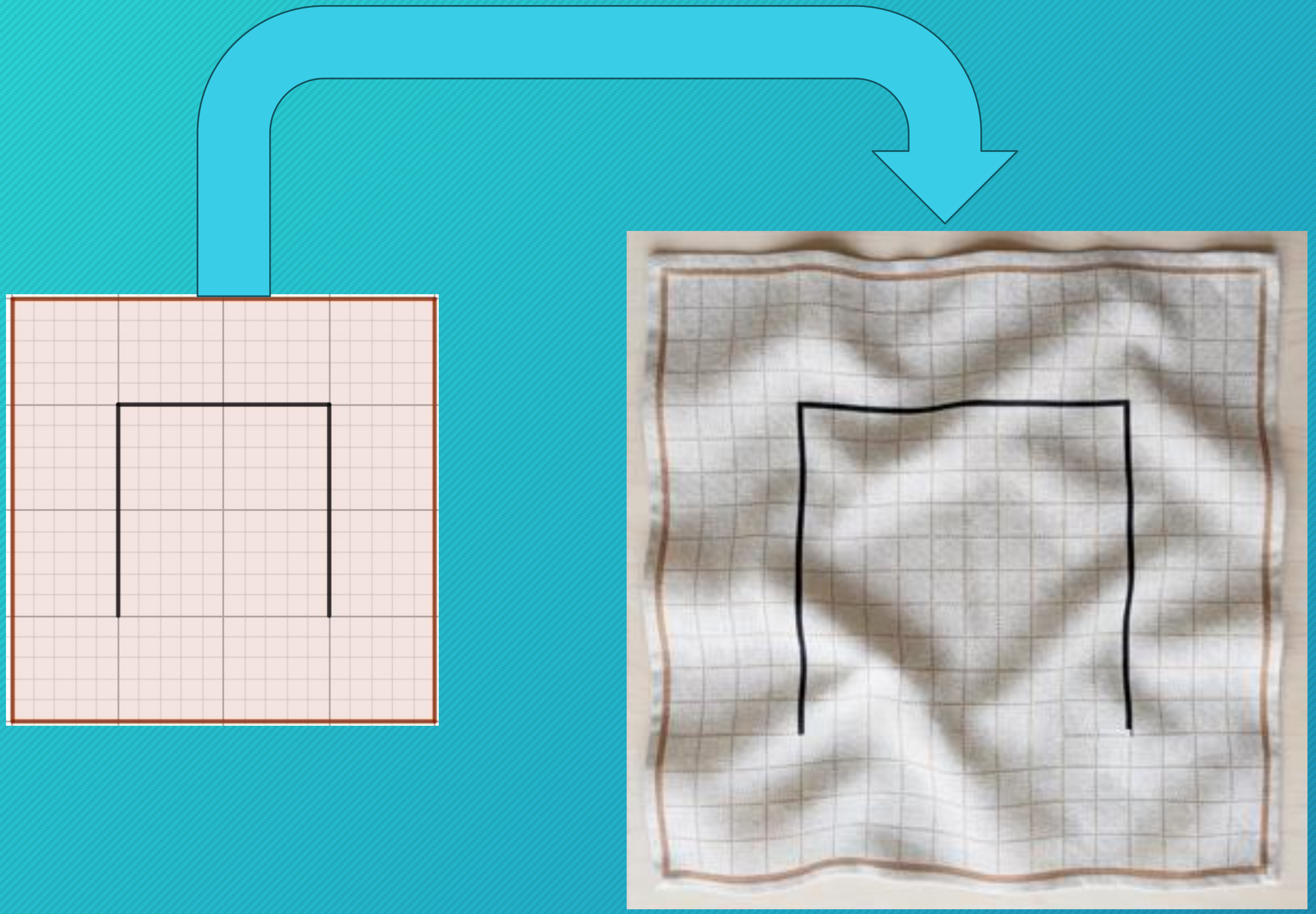
OMEOMORFISMI – esempi e invarianti



INVARIANTI:

- ~~Distanza tra due punti~~
- ~~Forma delle figure~~
- ~~Misura degli angoli~~
- ~~Parallelismo tra rette/segmenti~~
- ~~Allineamento dei punti~~
- Continuità delle linee

OMEOMORFISMI – esempio



INVARIANTI:

- ~~Distanza tra due punti~~
- ~~Forma delle figure~~
- ~~Misura degli angoli~~
- ~~Parallelismo tra rette/segmenti~~
- ~~Allineamento dei punti~~
- Continuità delle linee

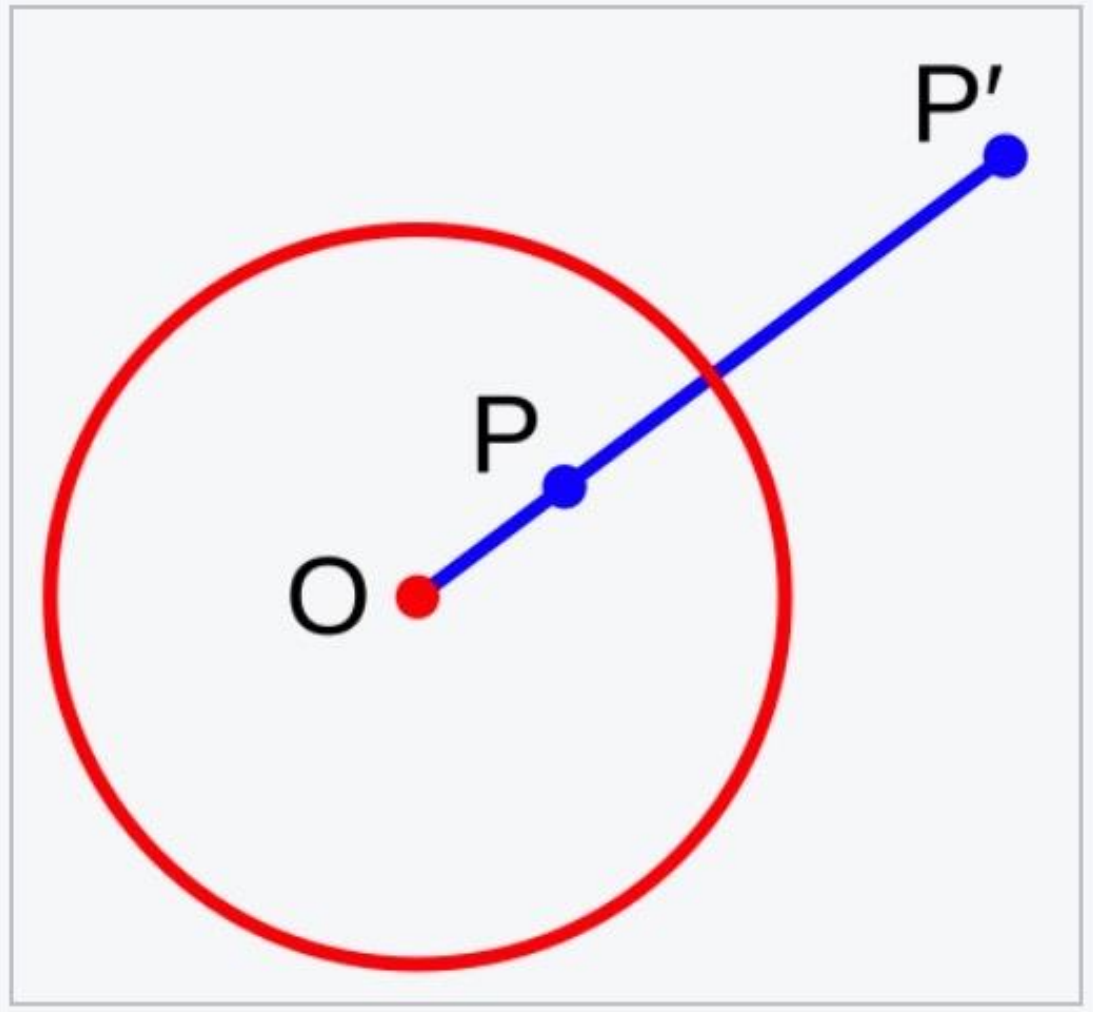
ESEMPIO DI OMEOMORFISMI – inversione circolare

Definizione [modifica | modifica wikitesto]

Sia γ una circonferenza di centro O e raggio r. L'**inversione circolare** rispetto a γ è la funzione I che associa ad ogni punto P del piano distinto da O il punto P' appartenente alla semiretta uscente da O e passante per P tale che

$$OP \cdot OP' = r^2.$$

Il punto P' è detto *punto inverso* di P rispetto alla circonferenza γ e r^2 è detta *potenza* dell'inversione.



Inversione.

Punto all'infinito [modifica | modifica wikitesto]

L'inversione non è definita per $P = O$. Si può definire l'inversione in O aggiungendo al piano un punto, il "punto all'infinito" ∞, e ponendo

$$I(O) = \infty, \quad I(\infty) = O.$$

Da Wikipedia

ESEMPIO DI OMEOMORFISMI – inversione circolare

Costruzione con riga e compasso [modifica | modifica wikitesto]

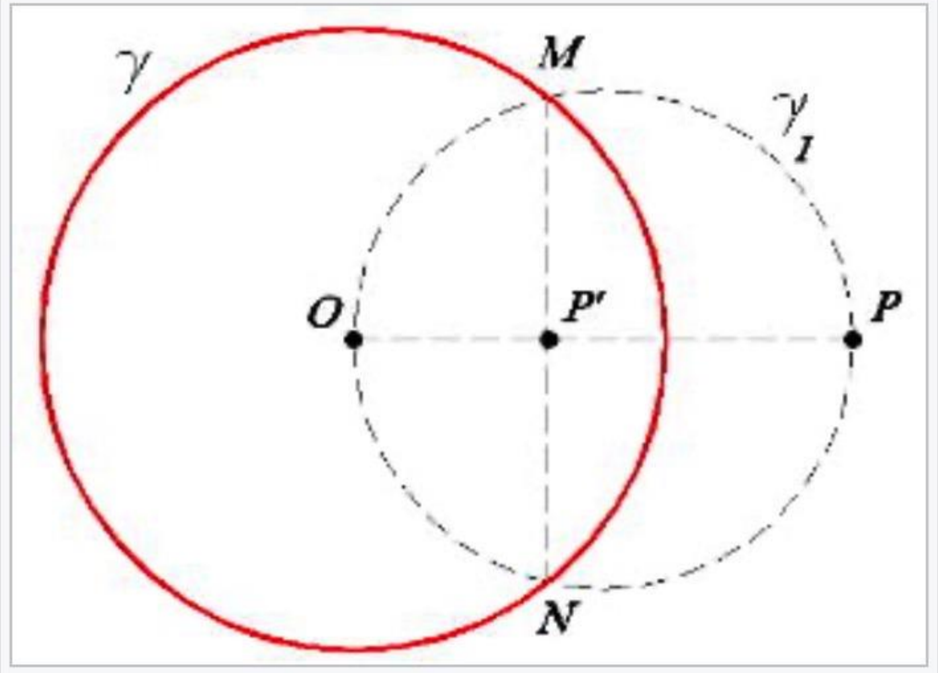
L'inverso di un punto può essere costruito con riga e compasso.

Caso 1: Il punto è esterno alla circonferenza [modifica | modifica wikitesto]

Si traccino le tangenti alla circonferenza γ passanti per P. Sia M uno dei suoi due punti di intersezione con γ e sia P' la proiezione ortogonale di M su OP. Si consideri il triangolo rettangolo di vertici O, M, P. Per il primo teorema di Euclide:

$$OP \cdot OP' = OM^2 = r^2.$$

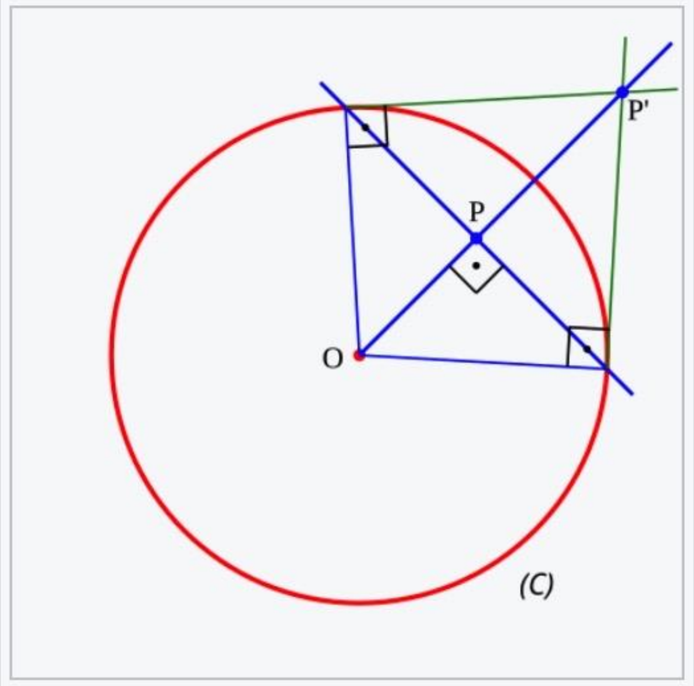
Il punto P' è, quindi, il trasformato di P mediante l'inversione di centro O e di potenza r^2.



Caso 1: Il punto P è esterno.

Caso 2: Il punto è interno alla circonferenza [modifica | modifica wikitesto]

Si consideri la retta passante per O e per P. Si tracci la retta passante per P e perpendicolare a tale retta. Troviamo così i punti di intersezione con γ, allora per il primo teorema di Euclide, P' è il punto di intersezione delle tangenti a γ condotte per tali punti.



Caso 2: Il punto P è interno.

Caso 3: Il punto appartiene alla circonferenza [modifica | modifica wikitesto]

In questo caso P' coincide con P. Tutti i punti di γ sono quindi punti fissi, cioè γ è un insieme puntualmente invariante rispetto all'azione di I.

Proprietà [modifica | modifica wikitesto]

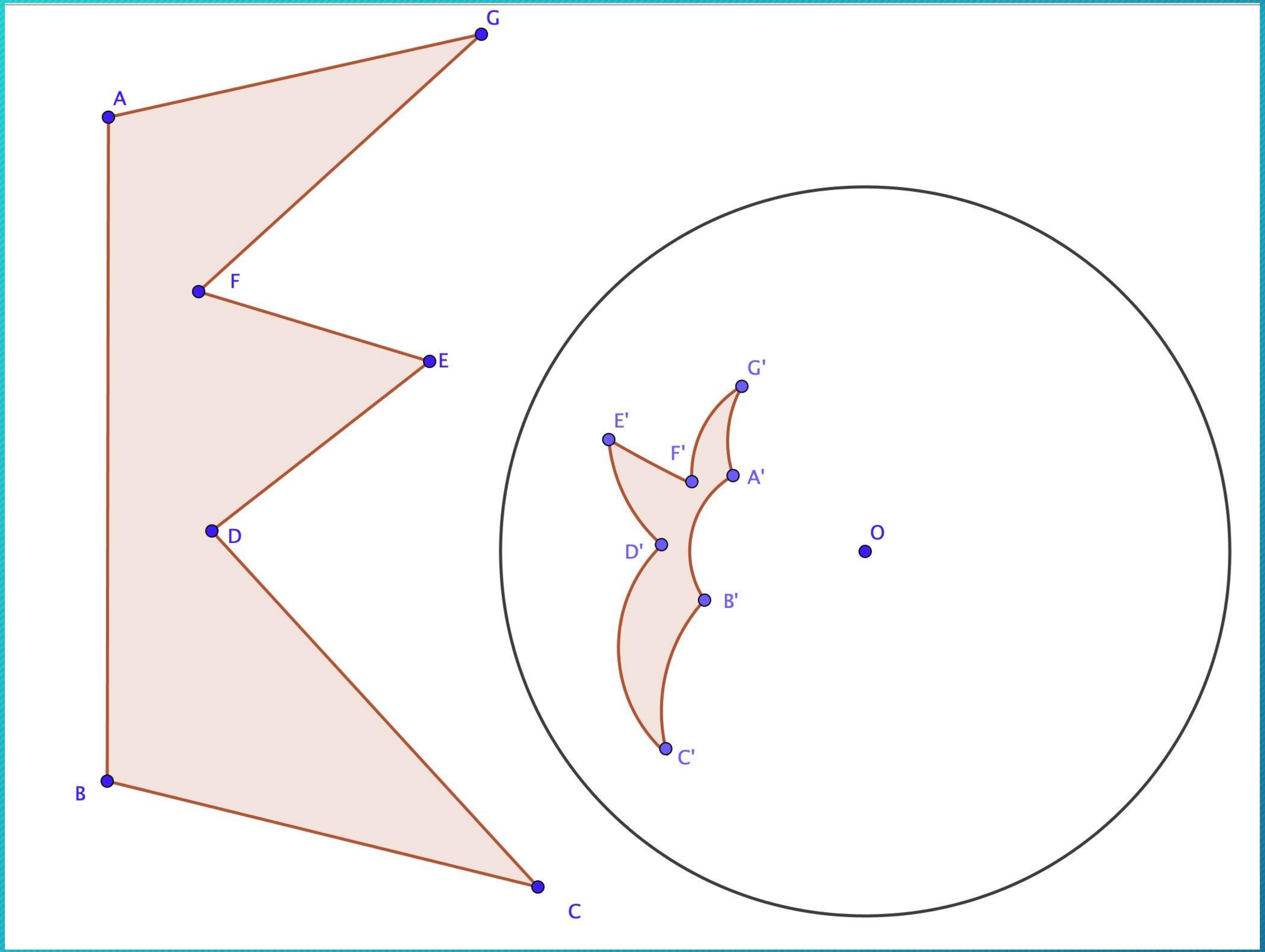
Nel piano cartesiano [modifica | modifica wikitesto]

Introducendo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale xOy la cui origine coincida con il centro dell'inversione, è possibile esprimere l'inversione I come la trasformazione che trasforma il punto $P(x;y)$ nel punto $P'(x';y')$ tramite le equazioni:

$$I: \begin{cases} x' = \frac{r^2 x}{x^2+y^2} \\ y' = \frac{r^2 y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Da Wikipedia

ESEMPIO DI OMEOMORFISMI – inversione circolare – trasformazione di una figura



L'inversione è una funzione **antiolomorfa**. Non è una funzione **olomorfa** perché cambia l'orientazione del piano. La composizione di due inversioni è però sempre una funzione olomorfa.

ESEMPIO DI OMEOMORFISMO – omeomorfismo spaziale

Una tazza ed una ciambella sono omeomorfi. Dalla "deformazione senza strappi" mostrata in figura si può infatti costruire un omeomorfismo fra i due oggetti.

Da: https://it.wikipedia.org/wiki/Omeomorfismo

UNA COMPOSIZIONE FONDAMENTALE: LA SIMILITUDINE

definizione

Similitudine

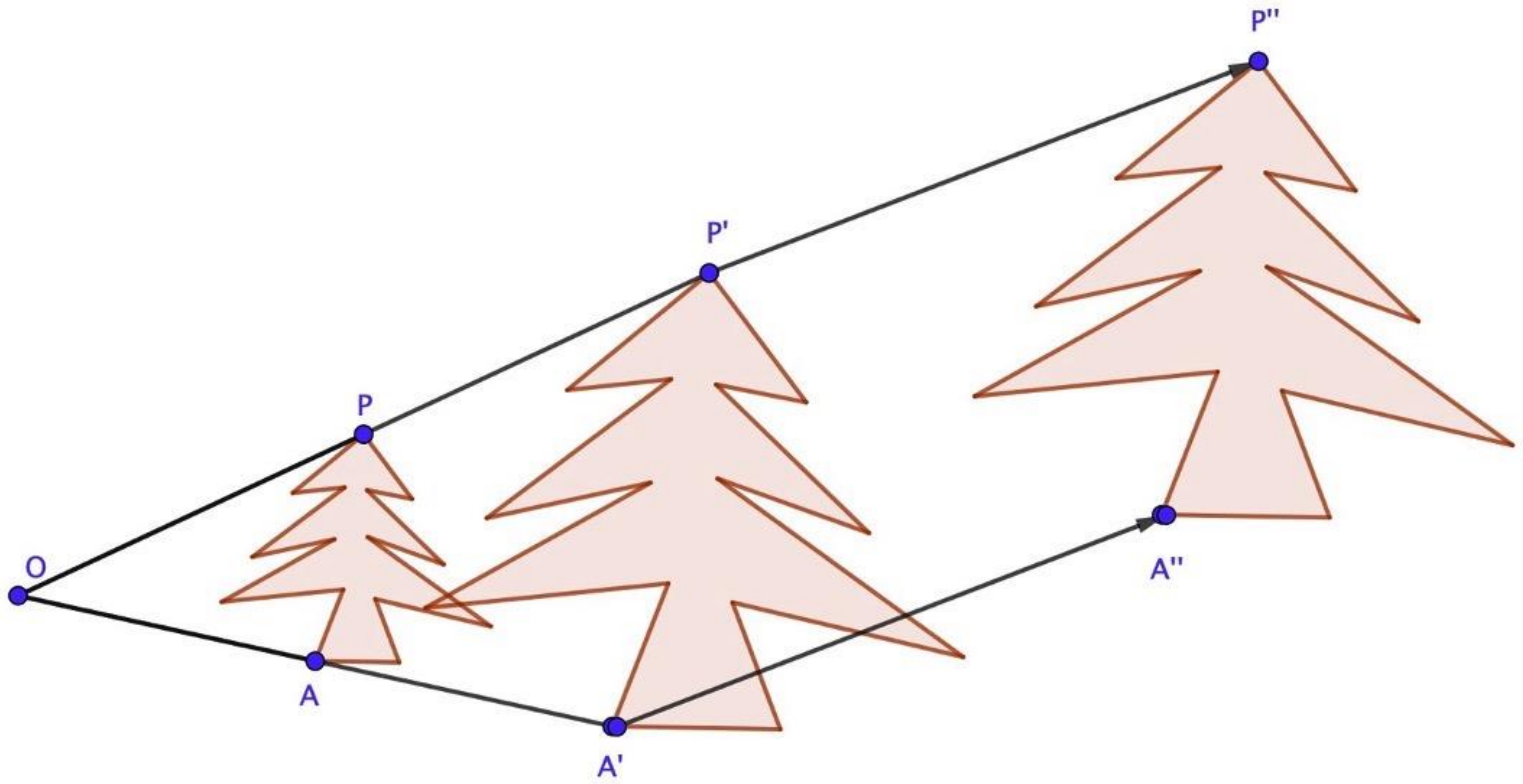
Una composizione di una omotetia con una isometria è detta

SIMILITUDINE

In figura a destra abbiamo composto un'omotetia di centro O e fattore $k = 2$ con una traslazione di vettore $\vec{v}$.

$$\tau_{(O,2)}(P) = P'$$
$$t_{\vec{v}}(P') = P''$$
$$t_{\vec{v}} \circ \tau_{(O,2)}(P) = P''$$

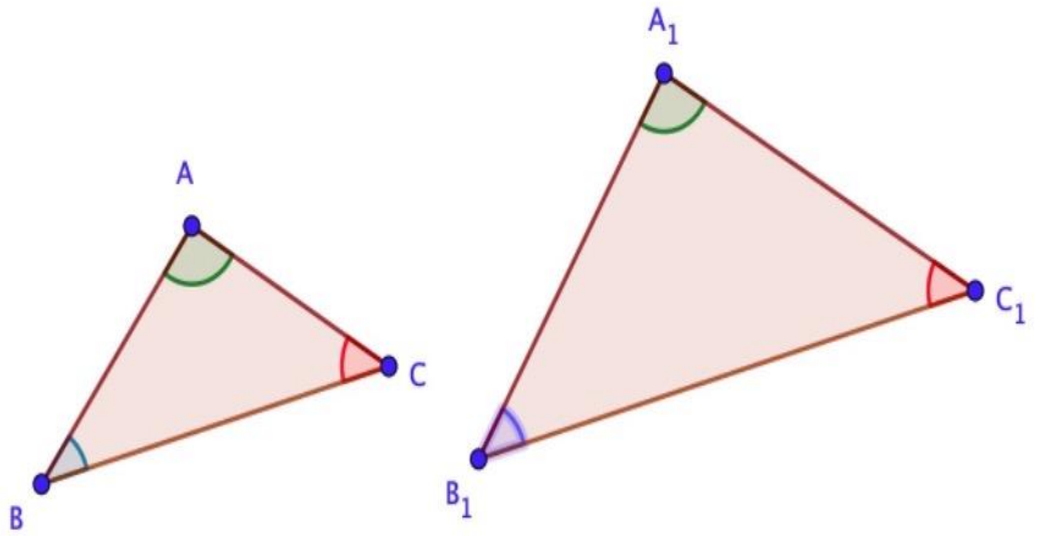
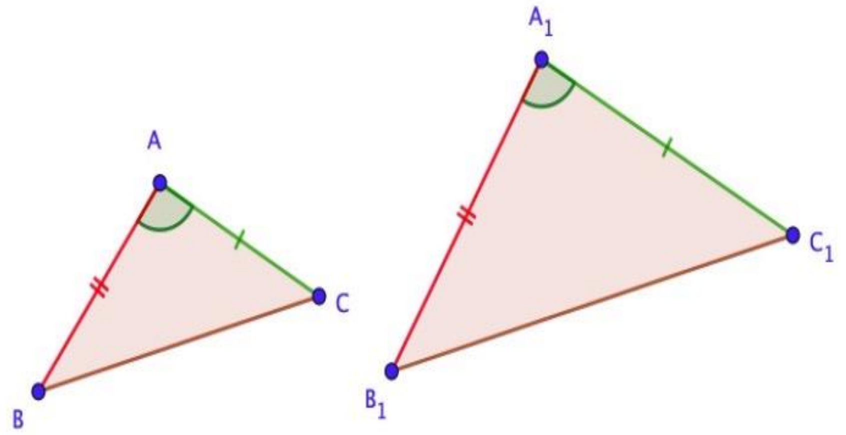
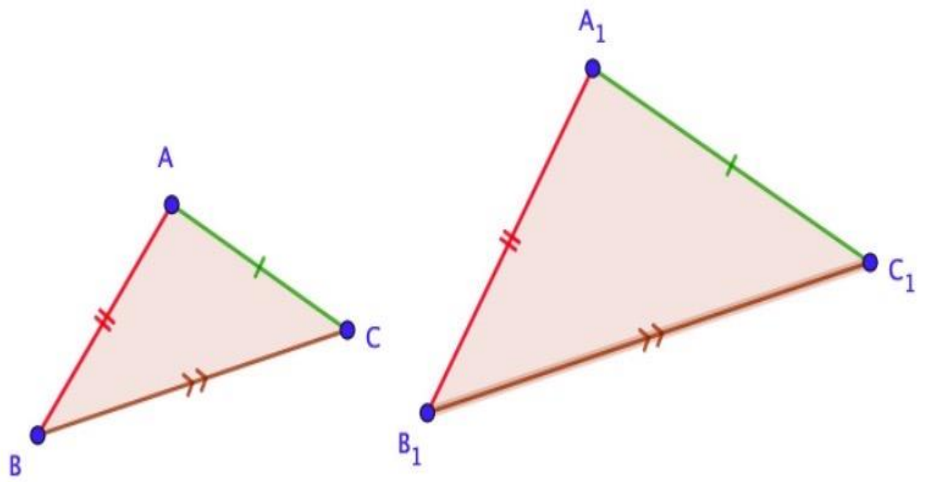
L'omotetia $\tau_{(O,2)}$ mappa P in P' e la traslazione $t_{\vec{v}}$ mappa P' in P''; la composizione $t_{\vec{v}} \circ \tau_{(O,2)}$ mappa P in P''. Le trasformazioni possono anche essere composte in ordine invertito, prima l'isometria e poi l'omotetia.



Posso comporre anche più di un'isometria con più di un'omotetia, e ottengo sempre una similitudine

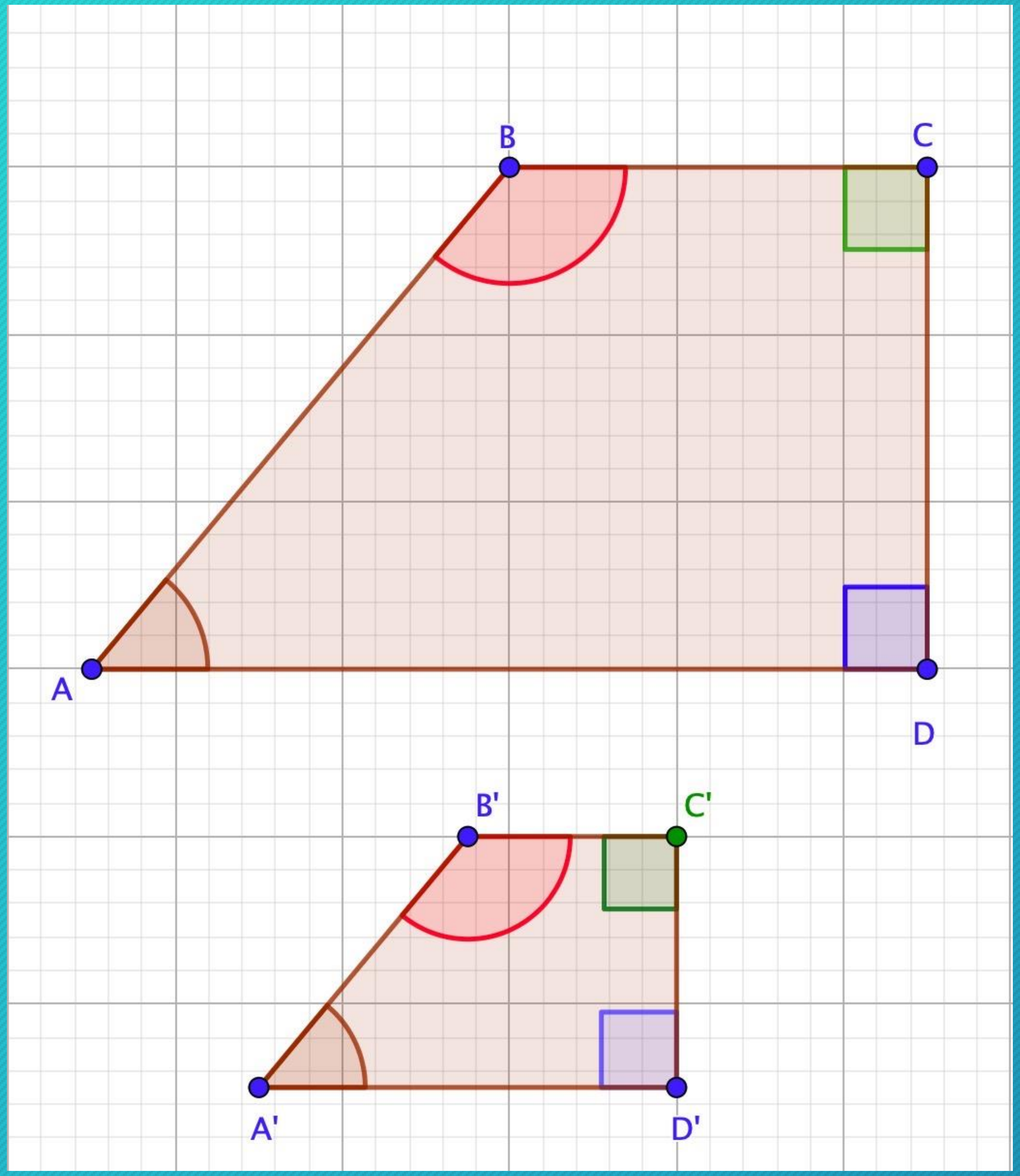
Lo dice il nome: una SIMILITUDINE è una trasformazione che produce figure SIMILI, che mantengono cioè la forma ma non necessariamente le dimensioni né necessariamente la posizione né l'orientamento sul piano

I 3 CRITERI DI SIMILITUDINE DEI TRIANGOLI

Criterio di similitudine		
Primo Due triangoli sono simili se hanno ordinatamente congruenti le tre coppie di angoli interni.		$\angle A = \angle A_1$ $\angle B = \angle B_1$ $\angle C = \angle C_1$
Secondo Due triangoli sono simili se hanno un angolo dell'uno congruente a un angolo dell'altro e le due coppie di lati adiacenti a tali angoli in proporzione.		$\angle A = \angle A_1$ $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$
Terzo Due triangoli sono simili se hanno le tre coppie di lati corrispondenti ordinatamente in proporzione.		$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$

Avere 3 coppie di angoli a due a due congruenti significa in realtà avere 2 coppie di angoli congruenti, i terzi saranno congruenti per differenza di somme congruenti di angoli dai 180° complessivi della somma degli angoli interni di un triangolo

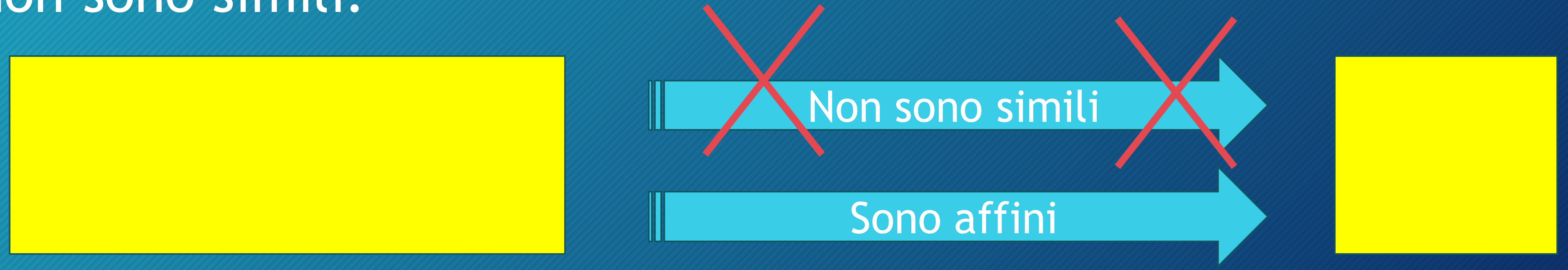
IL CRITERIO DI SIMILITUDINE DEI POLIGONI



Due poligoni sono simili se:

1. hanno ordinatamente congruenti gli angoli corrispondenti e
2. se i rapporti tra i lati corrispondenti sono tutti uguali (o, in altre parole, se tutte le coppie di lati corrispondenti sono in proporzione)

La condizione 1, che è sufficiente per la similitudine di due triangoli, non basta per i poligoni. Ne abbiamo già un esempio se pensiamo a un quadrato e a un rettangolo: hanno tutti gli angoli corrispondenti congruenti, ma non tutti i lati in proporzione, e non sono simili:



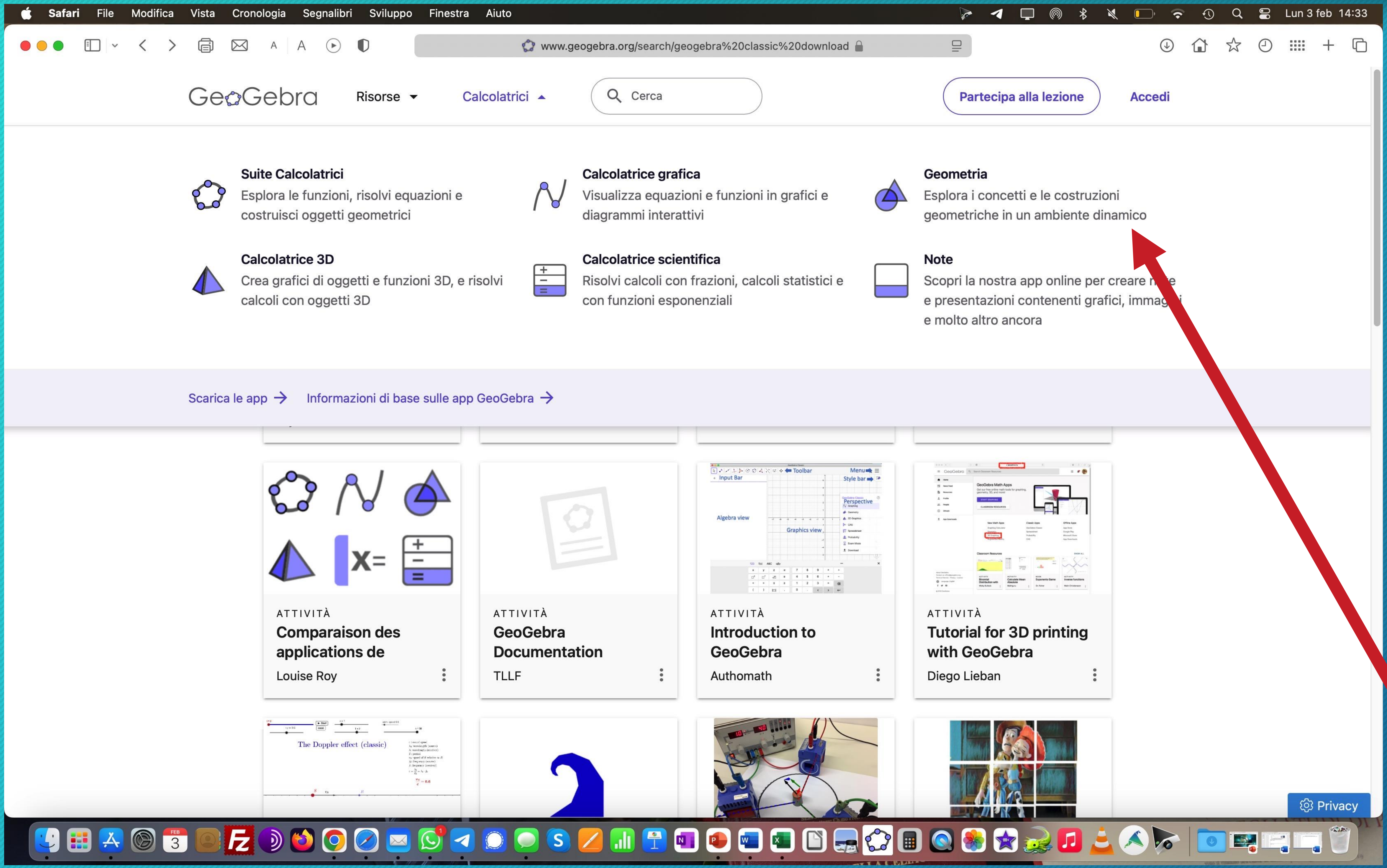
SPERIMENTIAMO CON GEOGEBRA

PROVIAMO A USARE GEOGEBRA PER «SPERIMENTARE UN PO' LE TRASFORMAZIONI»

HO SCELTO DI LAVORARE CON LA VERSIONE ON LINE SUL SITO

www.geogebra.org

GEOGEBRA - PICCOLA GUIDA - 1

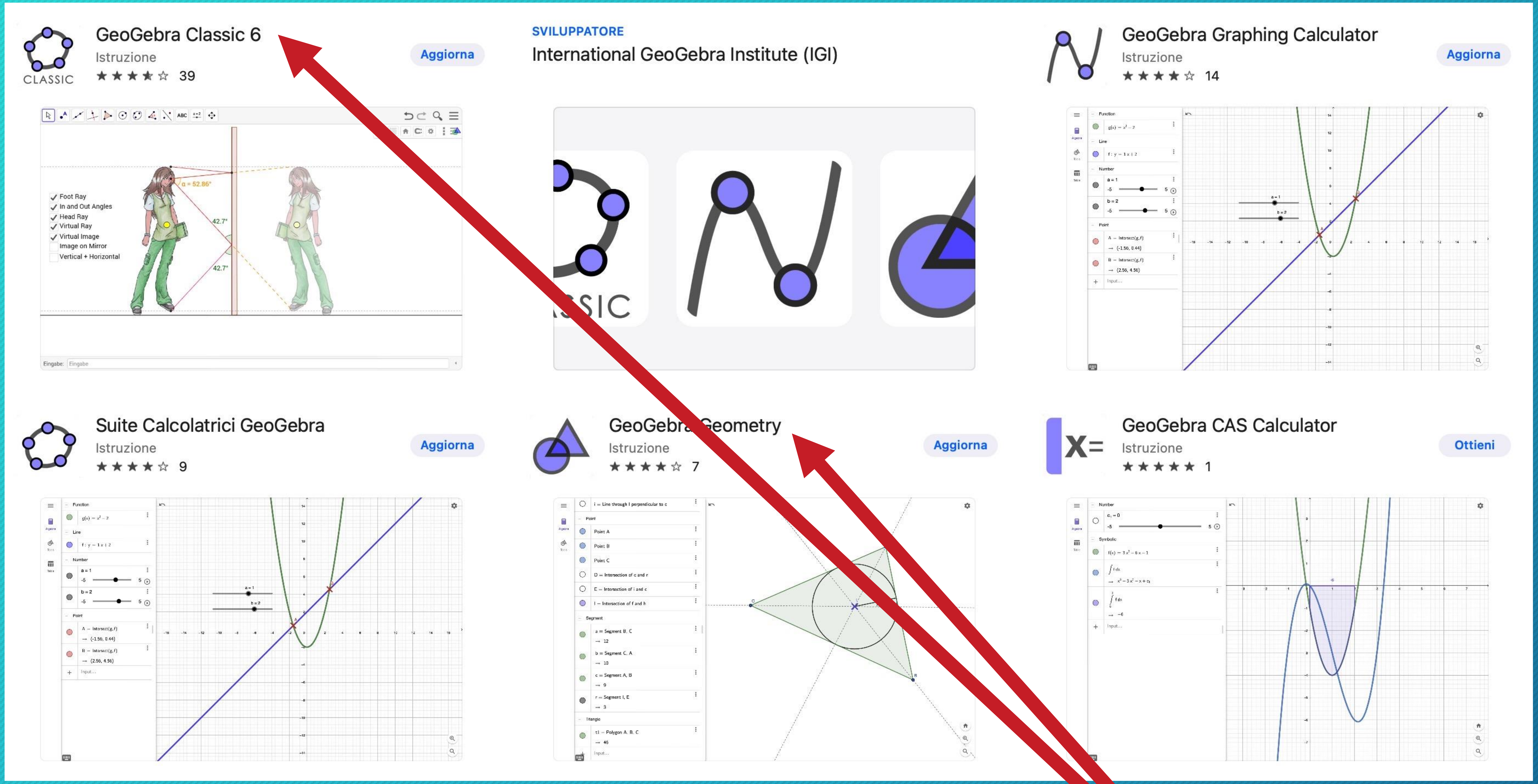


www.geogebra.org

utilizzabile direttamente on line (più scarno delle app per PC ma più semplice)

useremo «Geometria»

GEOGEBRA - PICCOLA GUIDA - 2

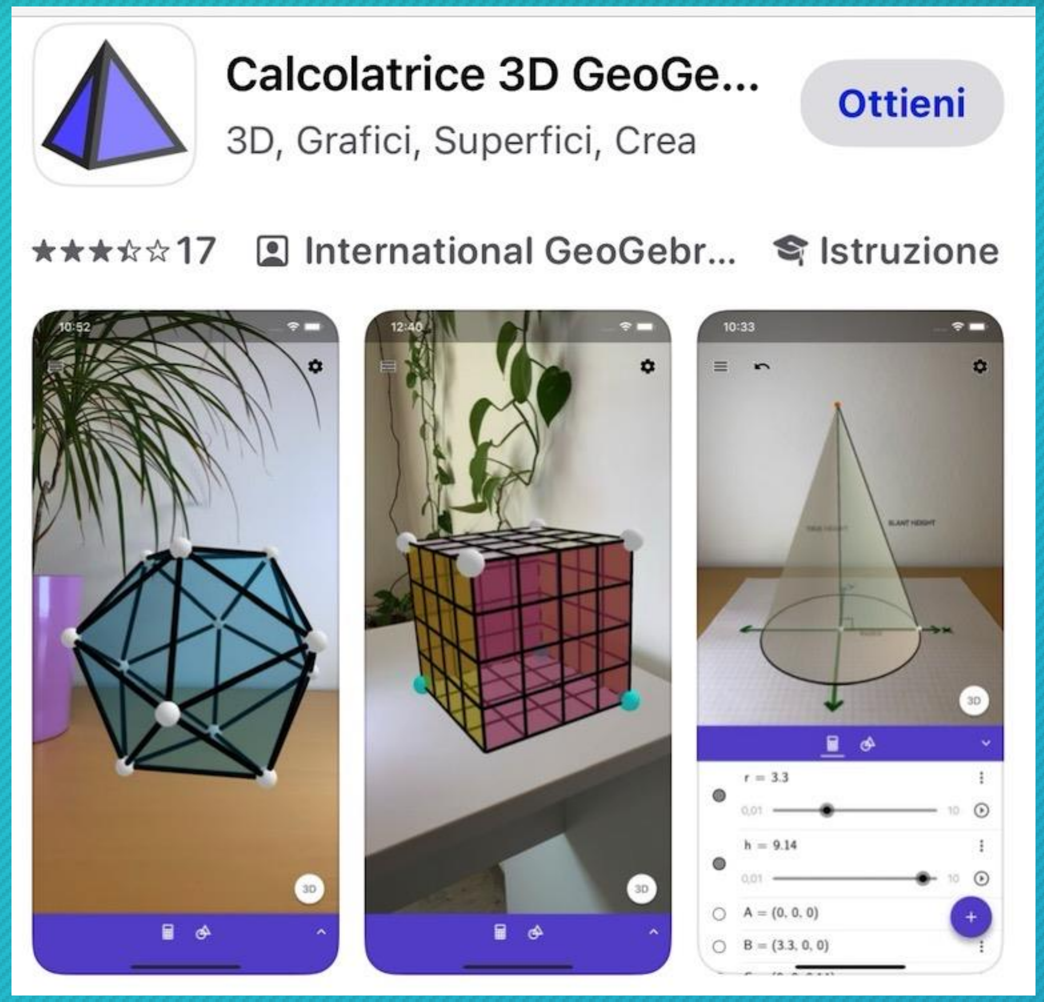


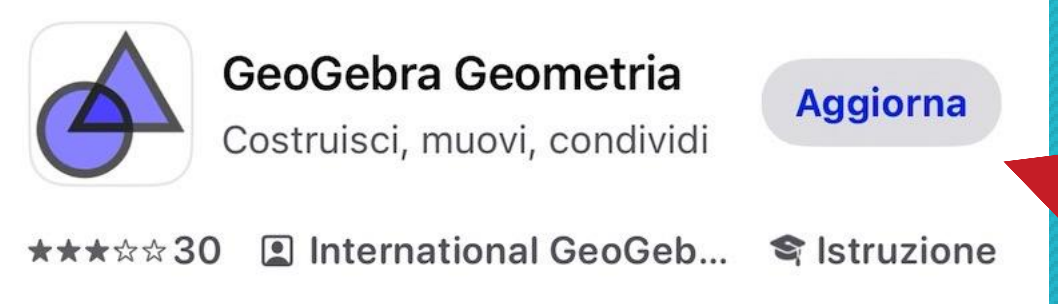
app per PC

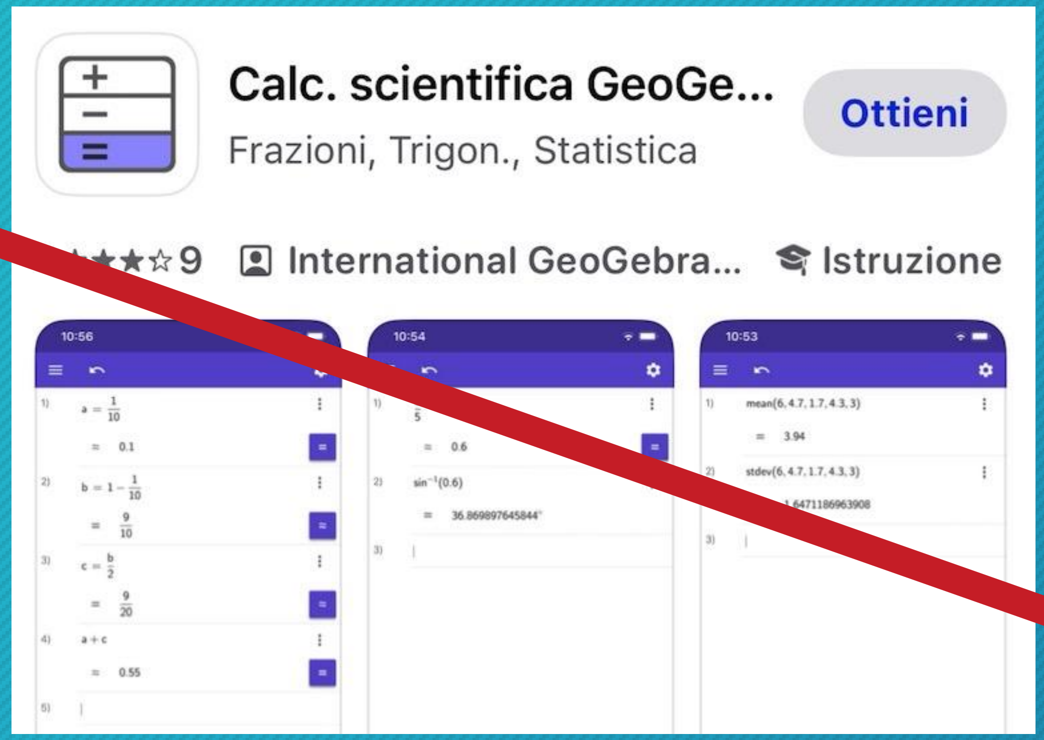
disponibili sia per Windows che per macOS

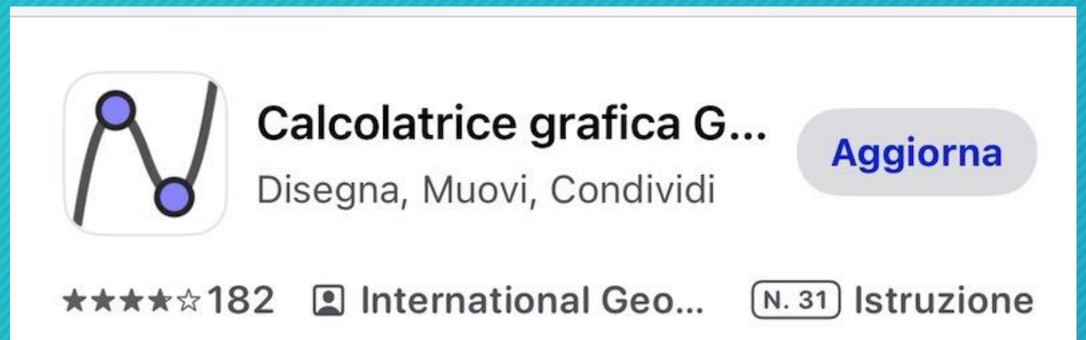
più ricche di funzioni (di selezione, di copia/incolla, …)

GEOGEBRA - PICCOLA GUIDA - 3





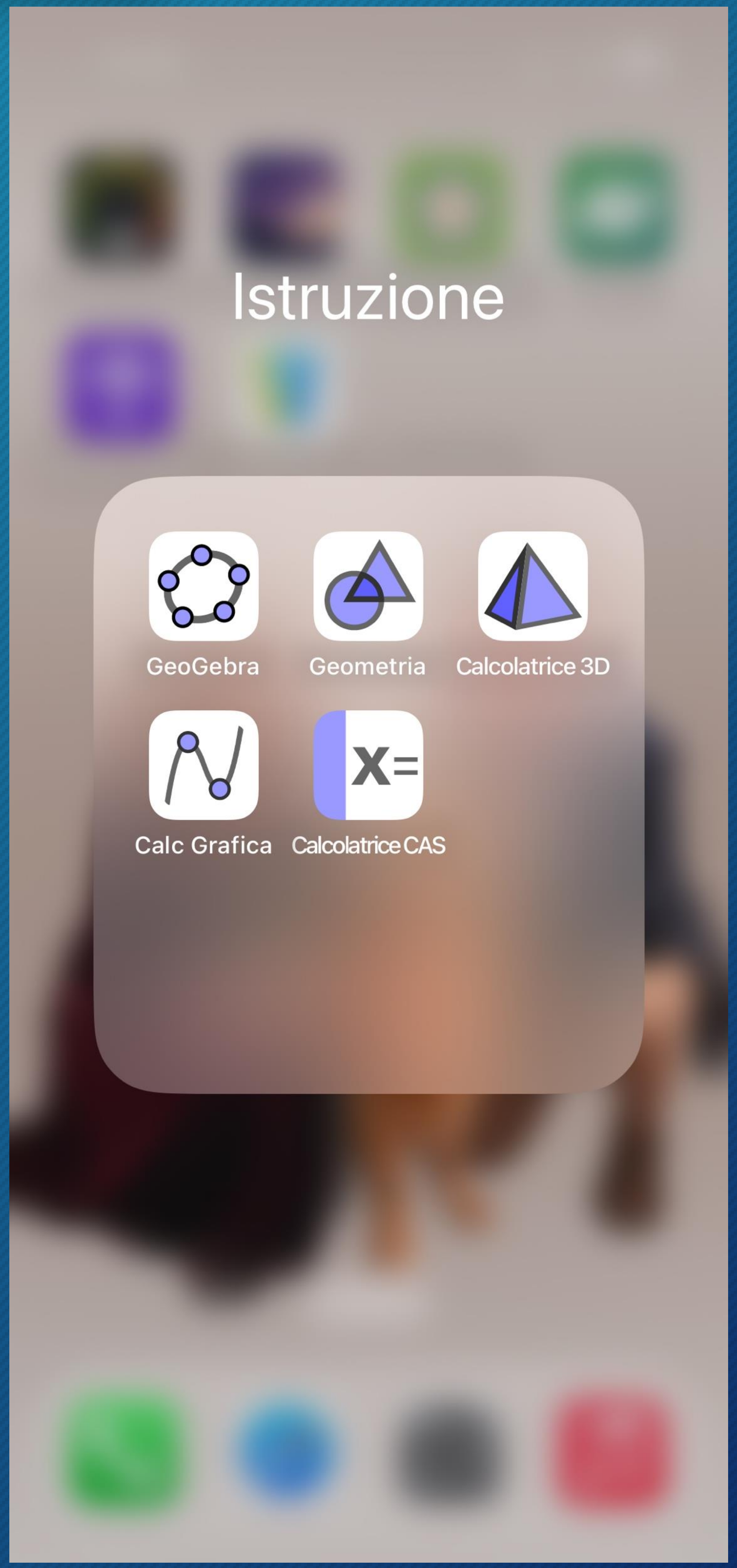




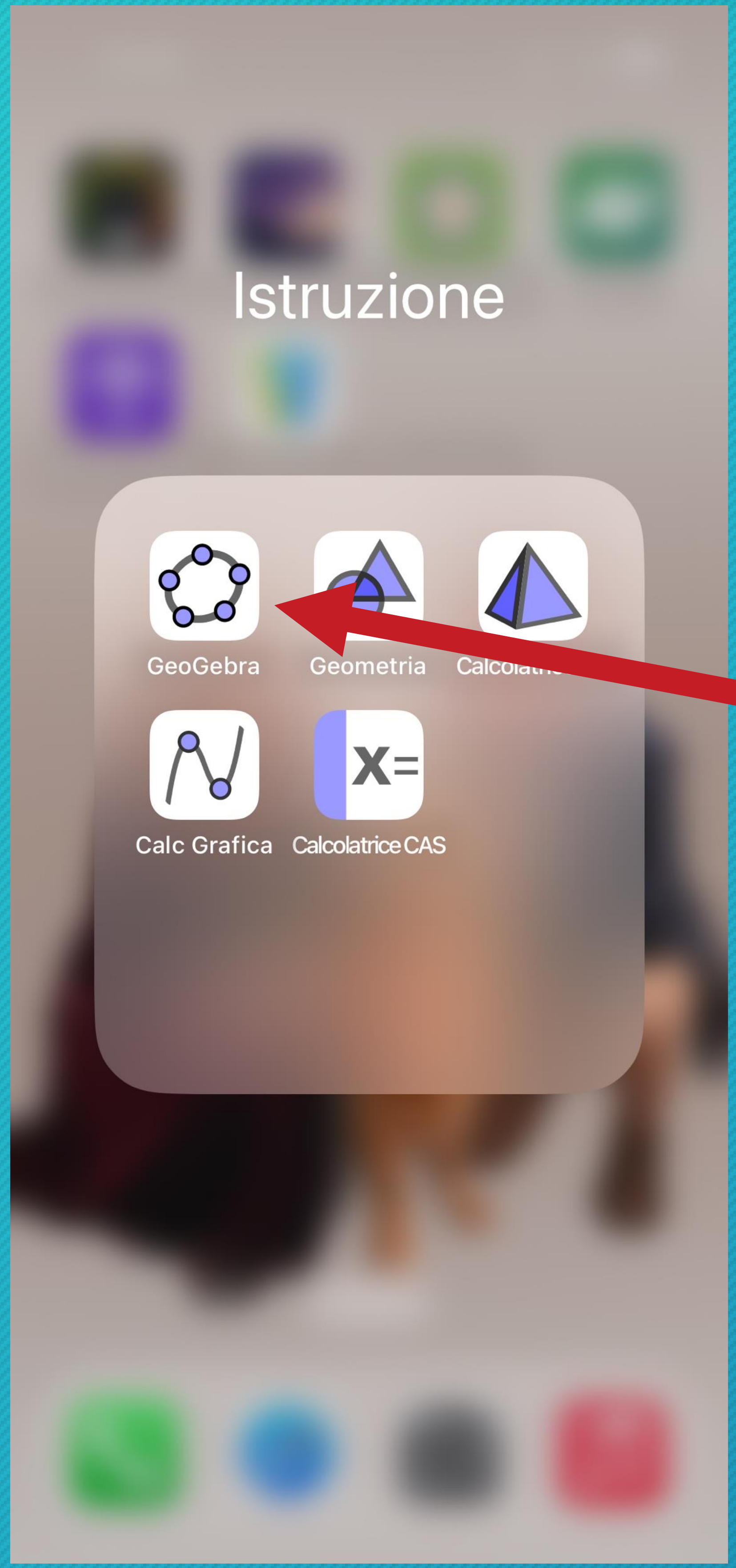
app per tablet/smartphone

disponibili sia per Android che per Ios

stesse funzionalità della versione on line

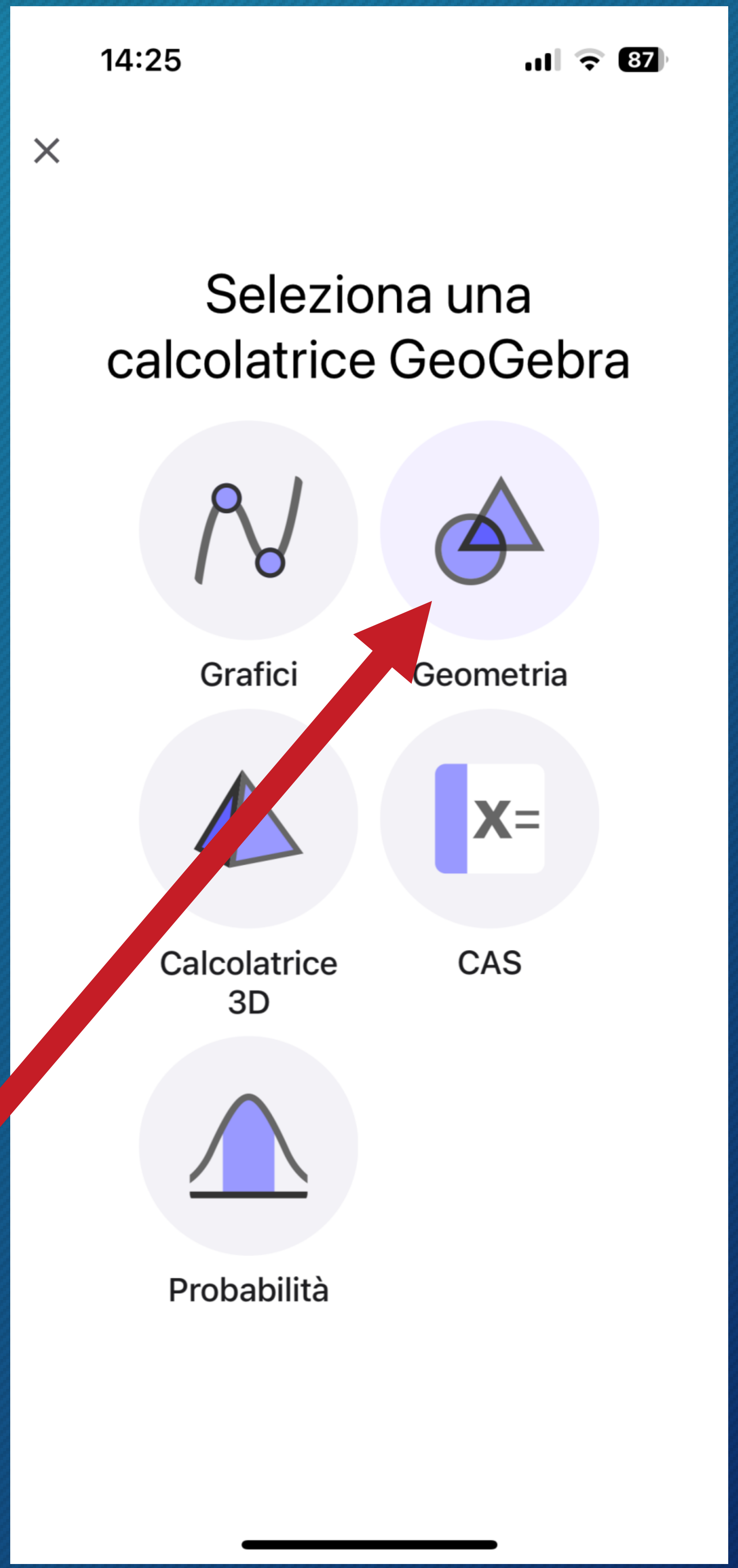


GEOGEBRA - PICCOLA GUIDA - 4



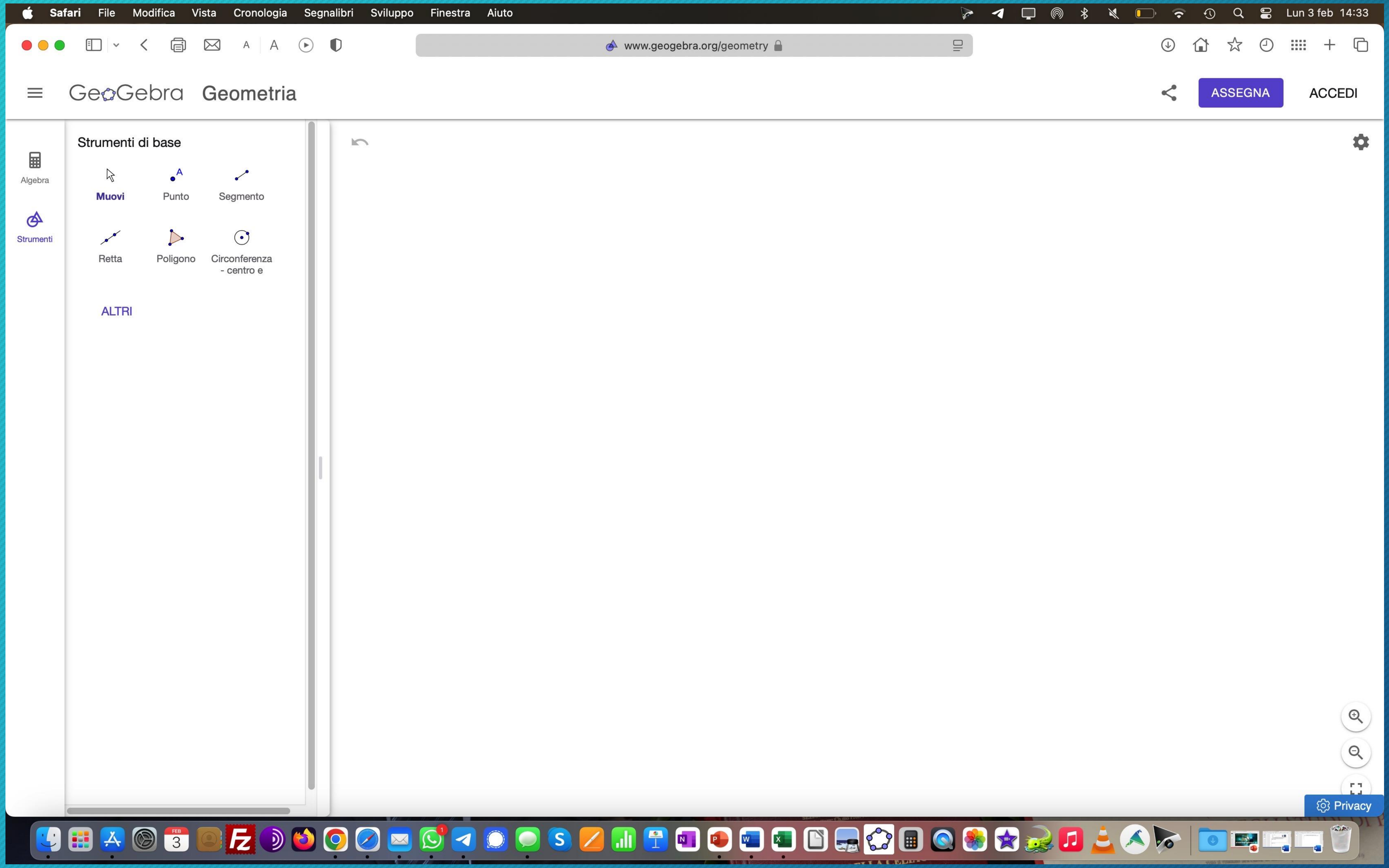
app per tablet/smartphone

l'app «Geogebra» già contiene le altre; all'apertura vi proporrà la scelta di quale usare:

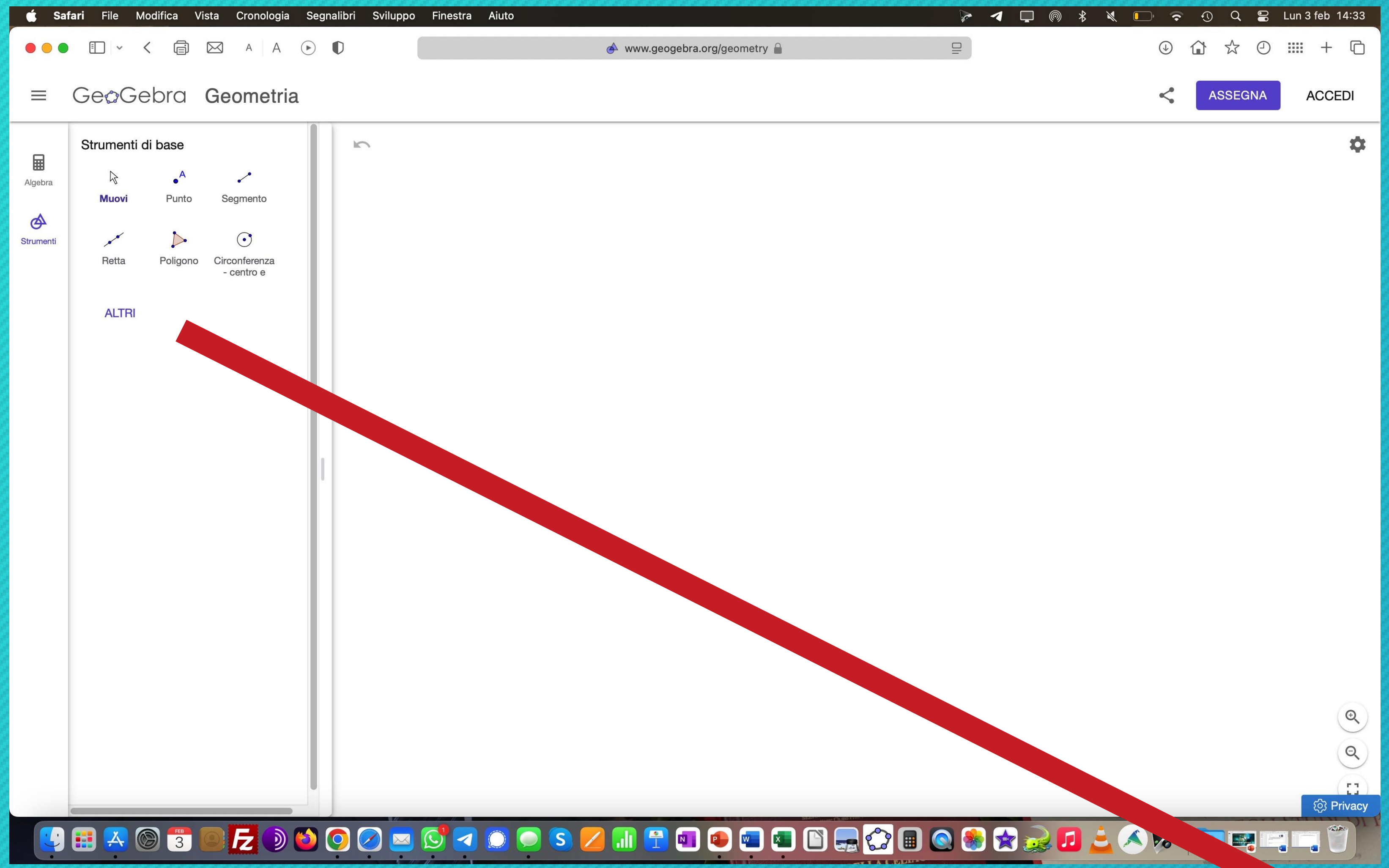


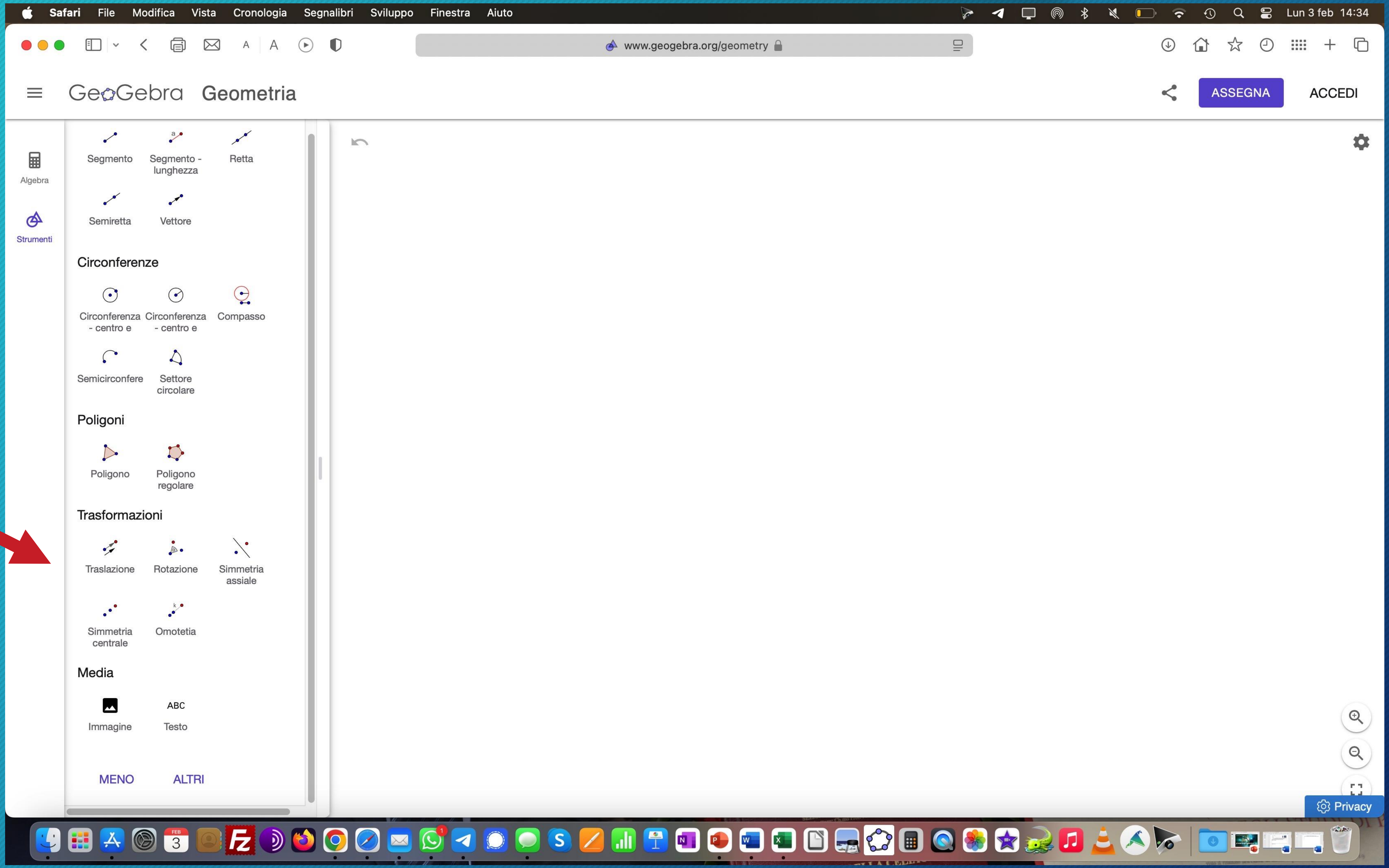
GEOGEBRA - PICCOLA GUIDA - 5

videata di apertura dell’app «Geometria»



GEOGEBRA - PICCOLA GUIDA - 6

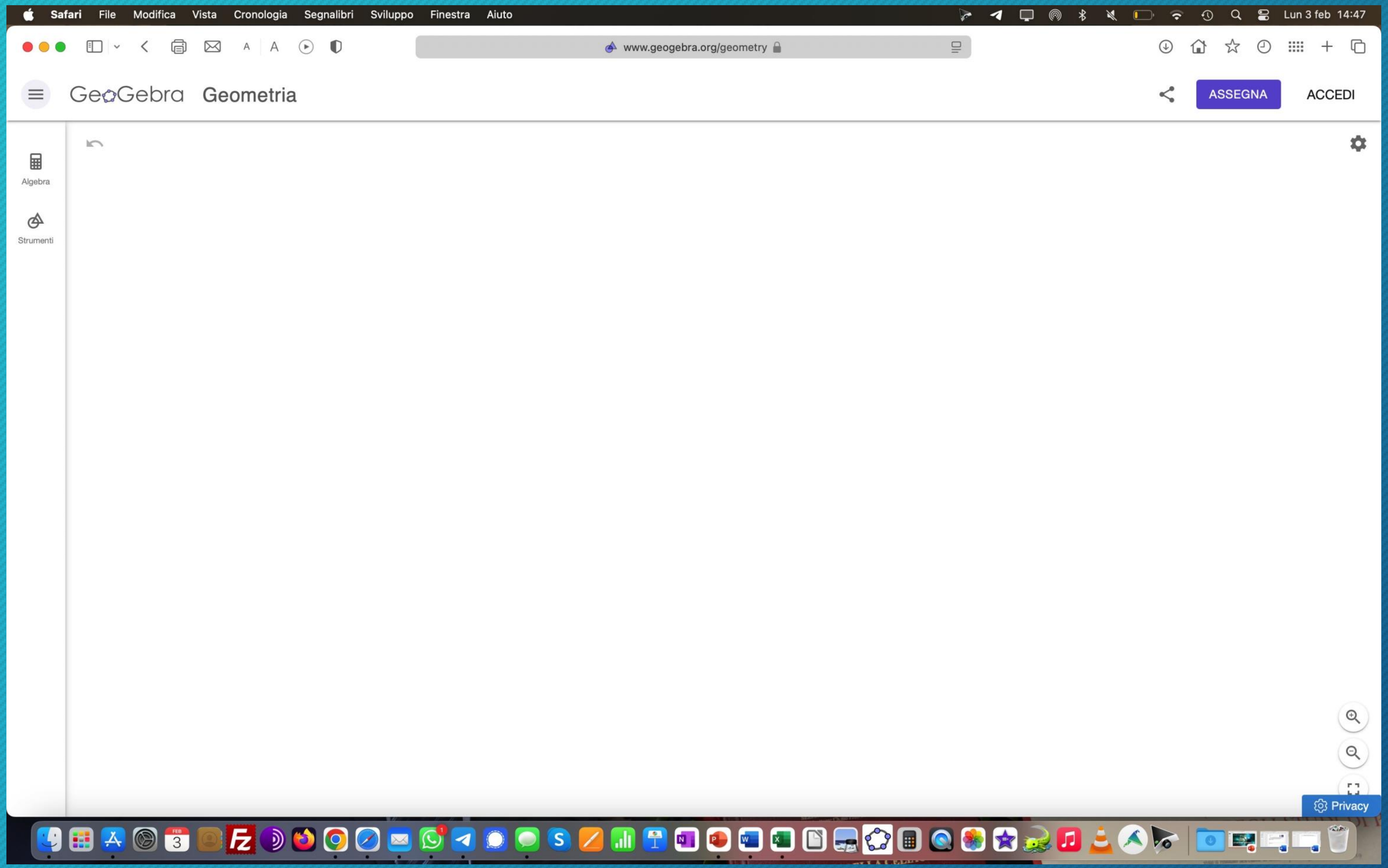


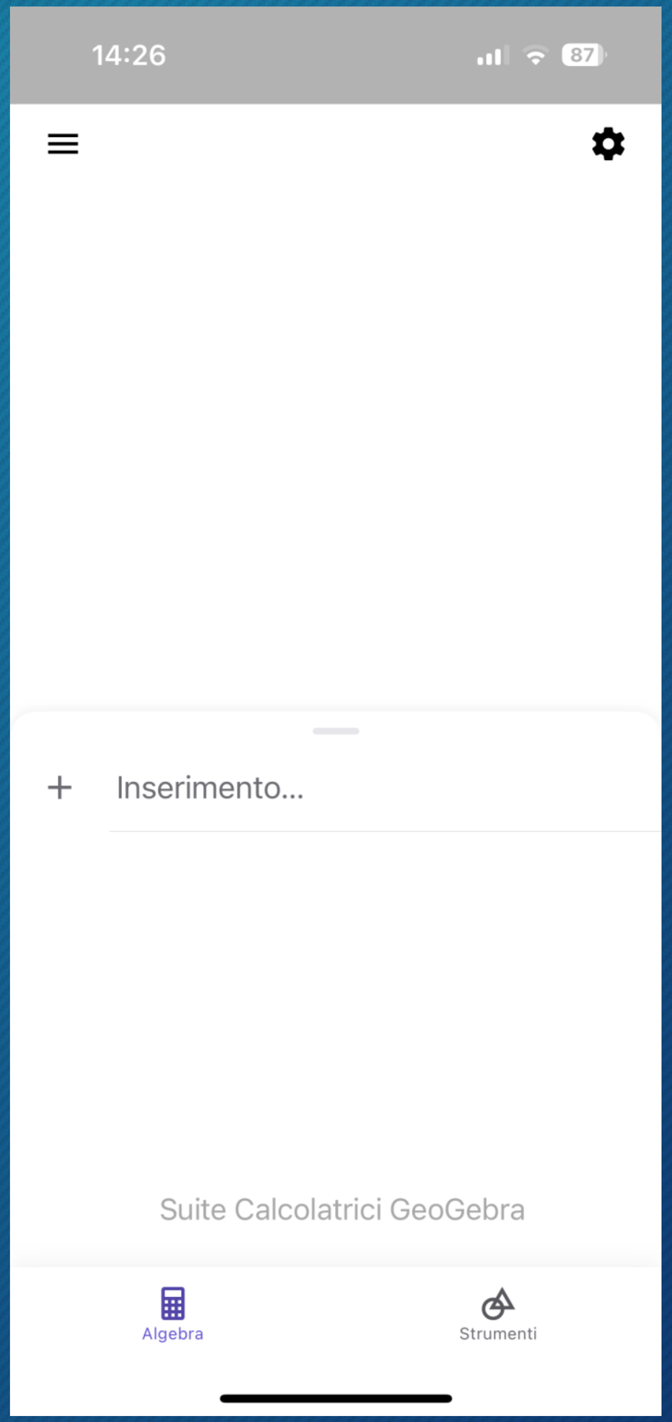


Il pulsante «ALTRO» estende le funzionalità disponibili, tra le quali troviamo «Trasformazioni»

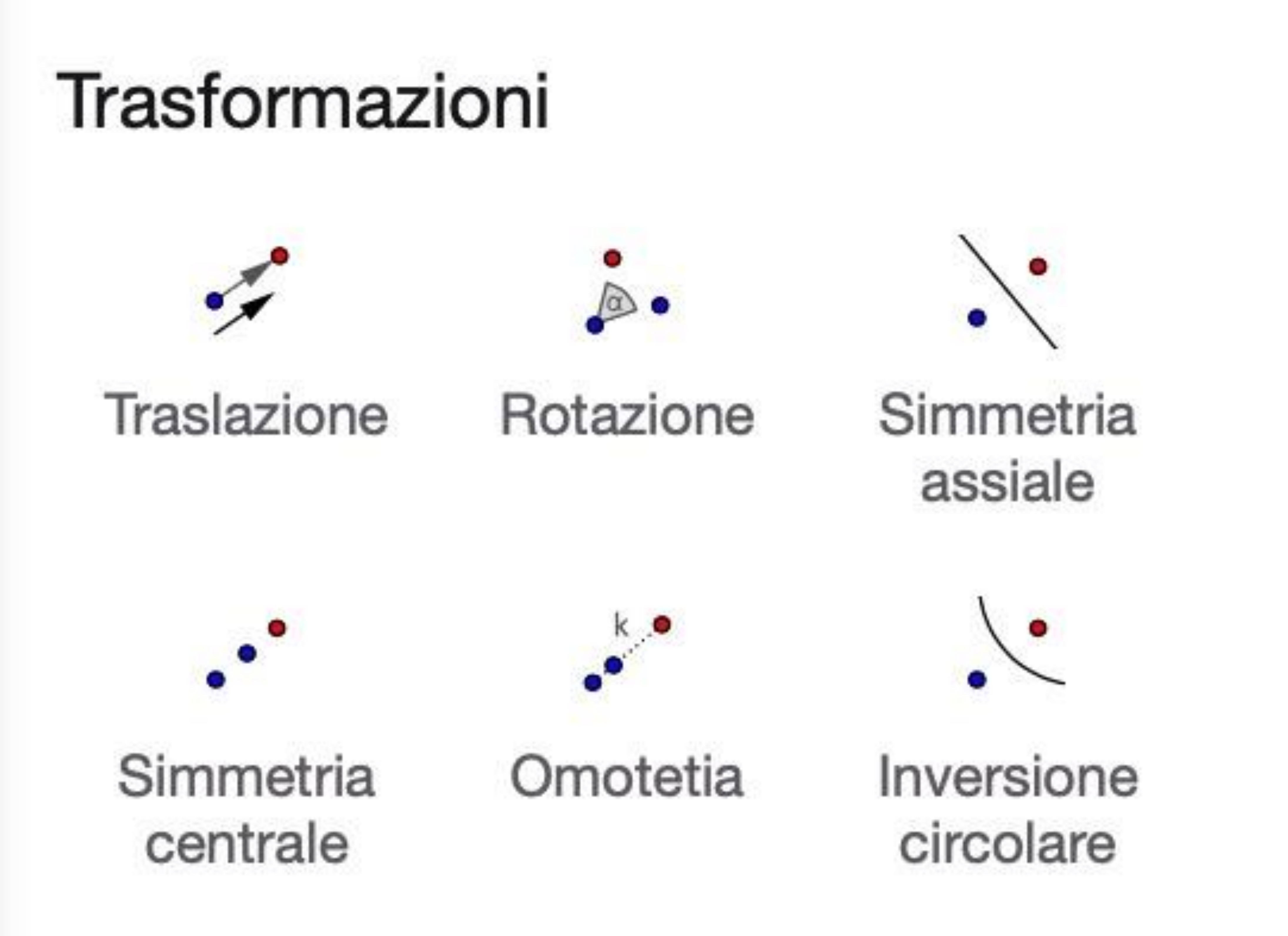
GEOGEBRA - PICCOLA GUIDA - 7

potete «switchare» la barra laterale (inferiore sul cellulare) tra «Strumenti» e «Algebra»





GEOGEBRA - PICCOLA GUIDA - 8



sperimentiamo insieme questi strumenti

potete usare, in via straordinaria, i vostri cellulari, ma **esclusivamente per svolgere l'esercitazione**;

Preferibilmente, se li avete portati, potete usare il PC o il tablet

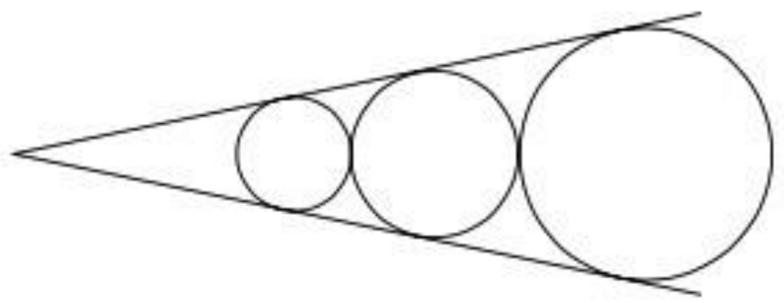
Avete qualche minuto per installare l'app (la «Suite» o «Geometria»). Vi invito a non fare confusione e a seguire attentamente le istruzioni che vi darò

E ORA … DIMOSTRIAMO!

1. VEDIAMO INSIEME TRE DIMOSTRAZIONI, TRATTE DA DUE TESTI DI GARE DI FEBBRAIO DELLE OLIMAT E DI UN PLAY OFF DI TREVISO
2. VI ASSEGNO POI DUE ESERCIZI DA PROVARE A FARE IN GRUPPO
3. CORREGGIAMO INSIEME I DUE ESERCIZI

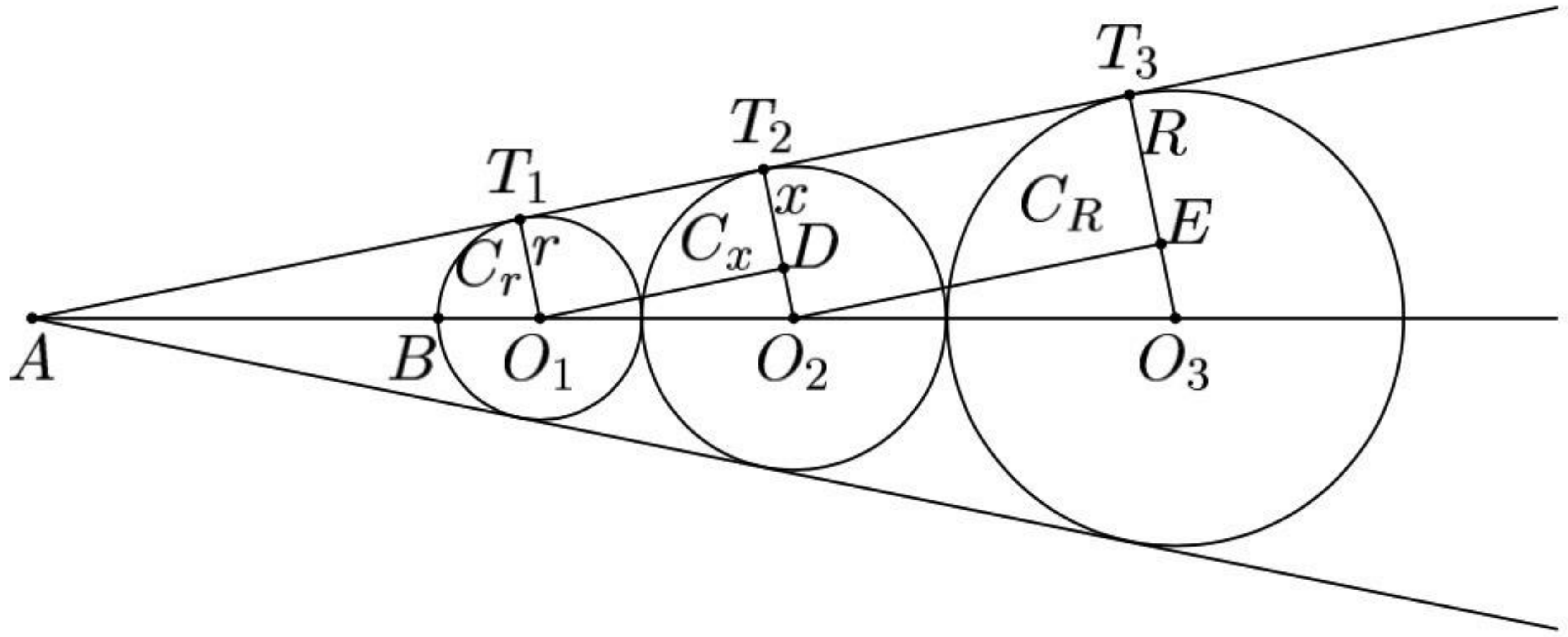
ESERCIZIO 1 – testo e prima risoluzione (con trasformazioni)

Tre circonferenze C_R, C_x, C_r di raggio rispettivamente uguale a R, x, r, hanno i centri allineati. Si sa che C_R e C_r sono tangenti esternamente a C_x e che le tre circonferenze hanno due tangenti esterne in comune (come in figura). Noti r, R, quanto vale x?



Detto A il punto d'incontro delle tangenti esterne e dette C_r, C_x e C_R le tre circonferenze di raggio r, x e R rispettivamente (con $r < x < R$), l'omotetia di centro A che trasforma C_r in C_x trasforma anche C_x in C_R. Poiché l'omotetia conserva i rapporti fra le lunghezze, si ha che

$$\frac{R}{x} = \frac{x}{r} \qquad \text{cioè} \qquad x = \sqrt{Rr}$$



ESERCIZIO 1 – altre possibili risoluzioni (classiche, con similitudini)

SECONDA SOLUZIONE

Posto $AO_2 = y$, dalla similitudine fra i triangoli AO_1T_1 e AO_2T_2 si ha:

[1] $\dfrac{y-r-x}{r} = \dfrac{y}{x}$, cioè $x(y-x) = r(y+x)$

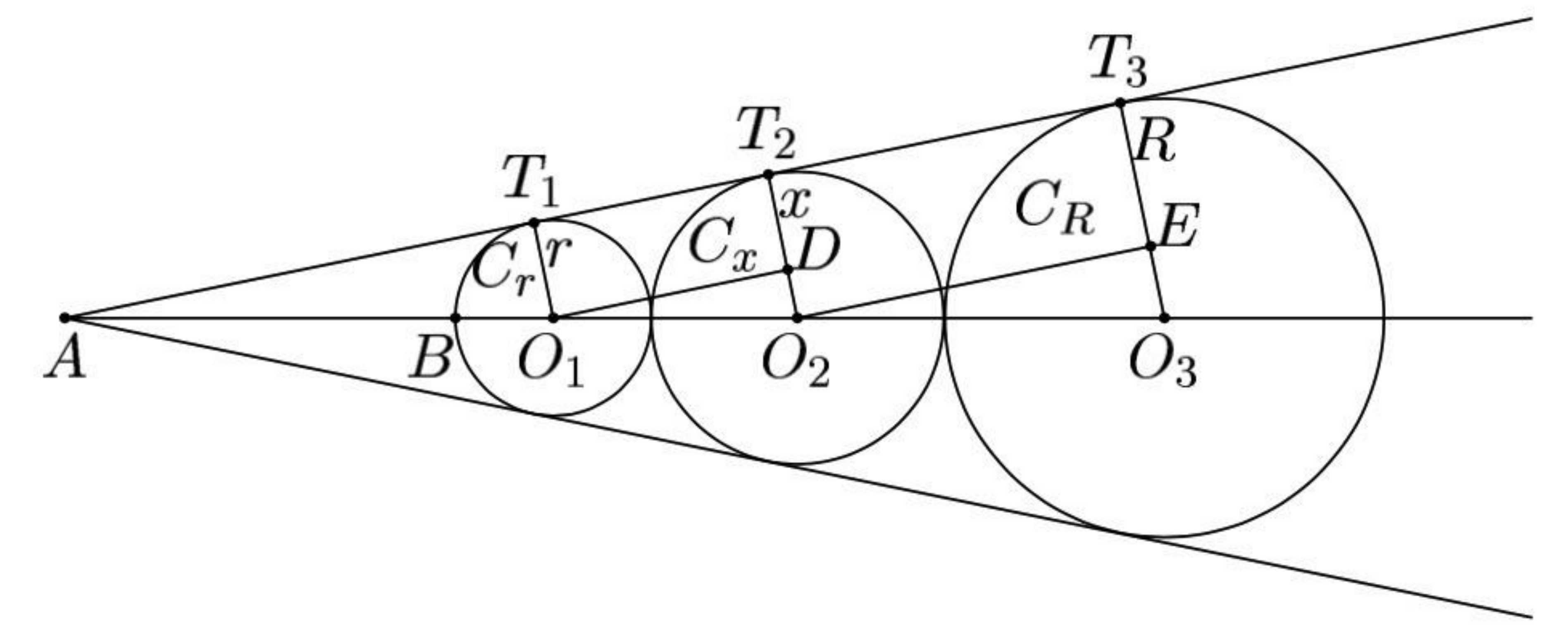
Dalla similitudine fra AO_2T_2 e e AO_3T_3 si ha inoltre:

[2] $\dfrac{y}{x} = \dfrac{y+x+R}{R}$, cioè $R(y-x) = x(y+x)$

Dividendo membro a membro per la [1] e la [2] ($y - x \neq 0$ perché y e x sono ipotenusa e cateto di un triangolo rettangolo) si ottiene:

$$\frac{x}{R} = \frac{r}{x},$$

cioè $x = \sqrt{rR}$



TERZA SOLUZIONE

Si traccino le rette passanti da O_1 e O_2 parallele ad AT_1. La prima retta interseca il raggio O_2T_2 in D e la seconda retta interseca il raggio O_3T_3 in E. Si osservi a questo punto che il triangolo O_1O_2D è simile al triangolo O_2O_3E, e che i quadrilateri $O_1O_2T_2T_1$ e $O_2O_3T_3T_2$ sono rettangoli. Si ha quindi

$$\frac{O_1O_2}{O_2D} = \frac{O_2O_3}{O_3E} \qquad \text{cioé} \qquad \frac{x+r}{x-r} = \frac{R+x}{R-x}$$

da cui si ricava $(x+r)\cdot(R-x) = (R+x)\cdot(x-r)$ e, svolgendo i prodotti, $Rx + Rr - x^2 - xr = Rx - rR + x^2 - xr$. Semplificando l'equazione precedente, si ottiene $2x^2 = 2Rr$ da cui, infine, $x = \sqrt{Rr}$.

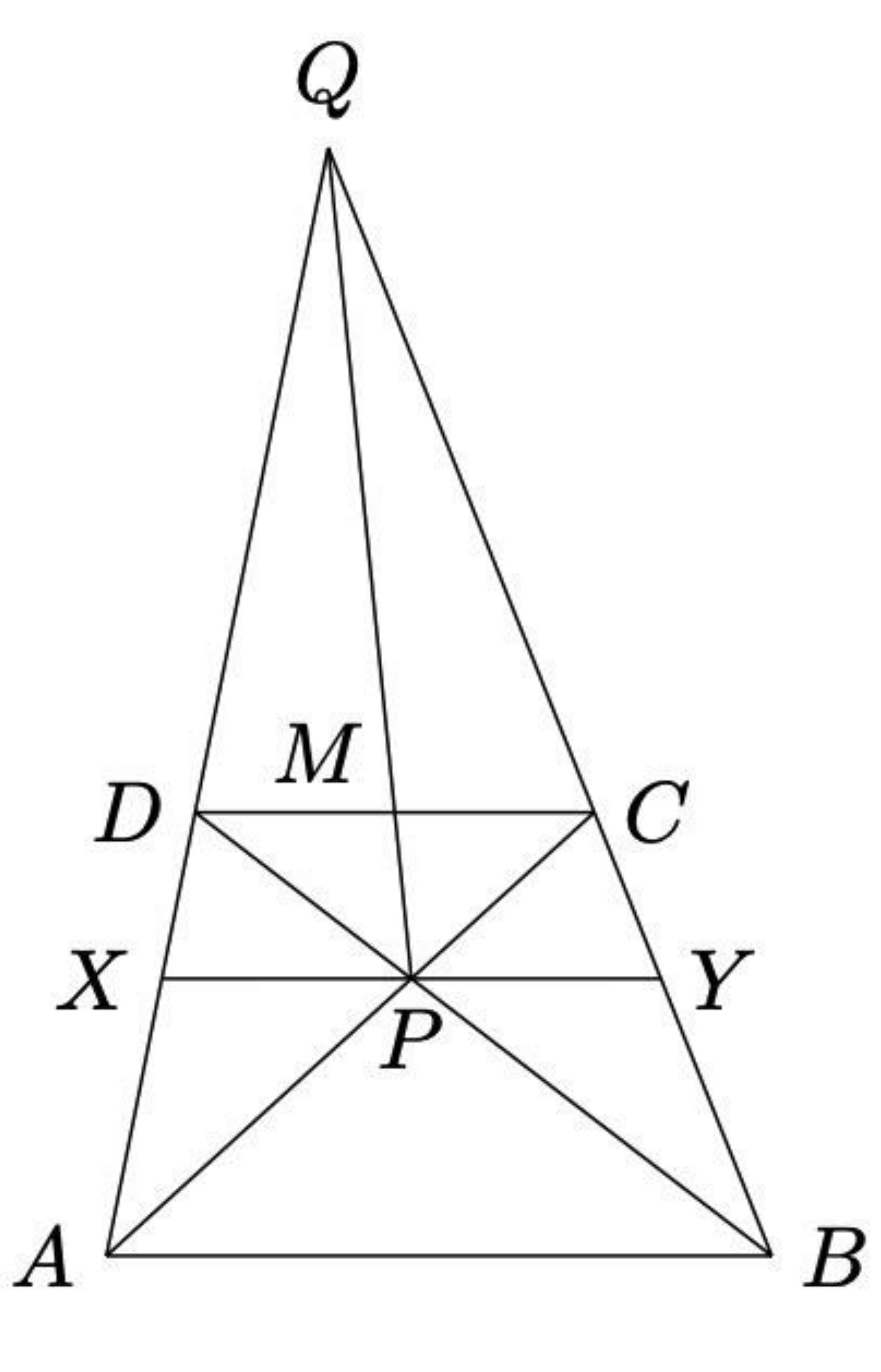
ESERCIZIO 2 - testo

Sia $ABCD$ un trapezio che non sia un parallelogramma. Siano P il punto d'incontro delle diagonali e Q il punto di intersezione dei prolungamenti dei lati obliqui.

(a) Si tracci la parallela alle basi passante per il punto P e siano X e Y i punti di incontro di essa con i lati obliqui: si dimostri che $XP = YP$.

(b) Si dimostri che la retta PQ interseca la base minore nel suo punto medio.

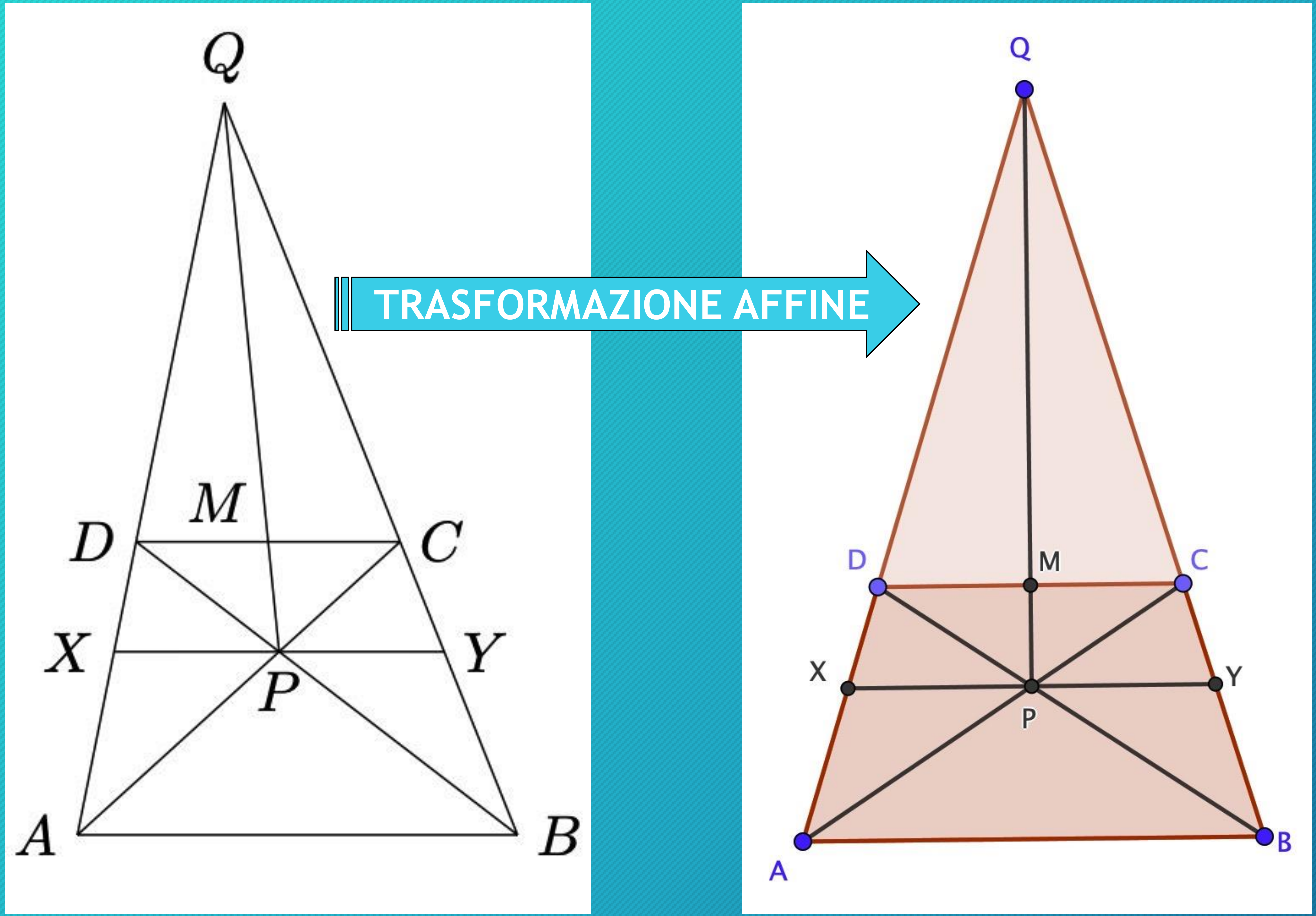
ESERCIZIO 2 – risoluzione classica (con similitudini)



(a) Supponiamo che CD sia la base minore del trapezio, che X sia su AD e Y su BC, come in figura. Poiché le rette AB, XY, DC sono parallele, per il teorema di Talete si ha la proporzione $DX : XA = CY : YB$, e dunque $DX : (DX + XA) = CY : (CY + CB)$, ovvero $DX : DA = CY : CB$.
Si osservi ora che i triangoli ABD e XPD sono simili, poiché XP è parallelo ad AB (dunque $D\widehat{X}P = D\widehat{A}B$ e $D\widehat{P}X = D\widehat{B}A$); ne deriva la proporzione fra lati corrispondenti $XP : AB = DX : DA$.
Allo stesso identico modo, il triangolo ABC è simile al triangolo PYC (PY è parallelo ad AB, gli angoli corrispondenti che si formano sono congruenti), e vale la proporzione $PY : AB = CY : CB$.
Combinando le proporzioni scritte sinora, $XP : AB = DX : DA = CY : CB = PY : AB$, dunque $XP = PY$, come volevasi dimostrare.

(b) Sia M il punto d'intersezione tra QP e la base minore. Per il parallelismo tra DC e XY abbiamo, alla maniera della dimostrazione precedente, la similitudine tra il triangolo QDM e il triangolo QXP, come pure fra il triangolo QMC e il triangolo QPY. Ne ricaviamo le proporzioni $DM : MQ = XP : PQ$ e $CM : MQ = YP : PQ$; poiché, per il punto (a), $XP = YP$, se ne ricava $DM : MQ = CM : MQ$, e dunque infine $DM = CM$ (M è il punto medio di DC).

ESERCIZIO 2 – risoluzione con trasformazione (affinità)



SECONDA SOLUZIONE

Si osservi che le tesi del problema (sia quella del punto (a) che quella del punto (b)) sono invarianti per trasformazioni affini del piano: le affinità conservano infatti i rapporti fra le lunghezze di segmenti sulla stessa retta, e dunque è sufficiente mostrare le tesi su di un'immagine affine della costruzione iniziale.

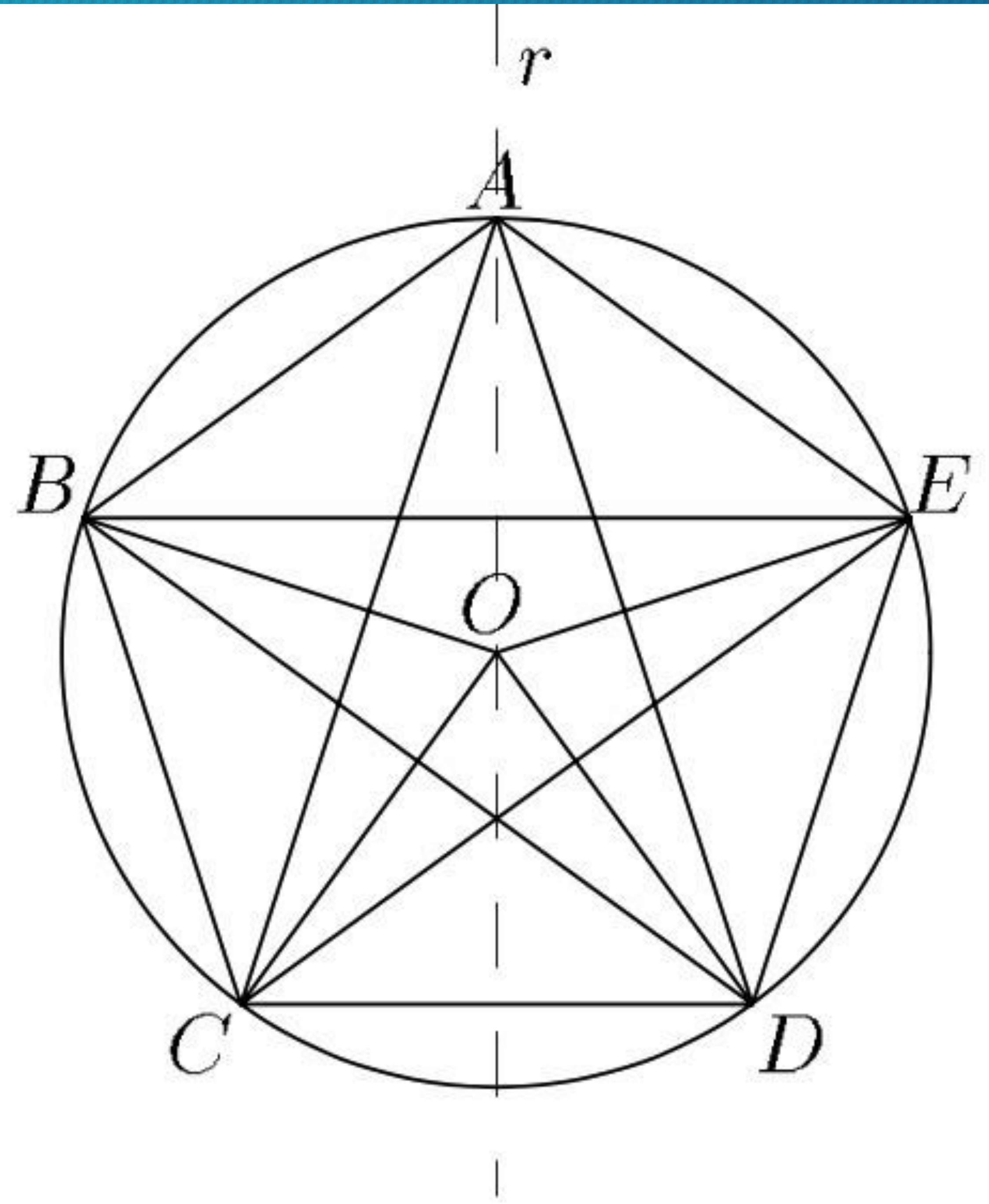
Ogni trapezio $ABCD$ può essere trasformato tramite affinità in un trapezio isoscele; si prenda ad esempio l'affinità che fissa A e B e manda Q in un punto (diverso dal punto medio di AB) sull'asse di AB. Il triangolo ABQ viene mandato in un triangolo isoscele, il trapezio in un trapezio isoscele; poiché le affinità mandano rette in rette e conservano il parallelismo, la costruzione del problema rimane la medesima. Ci siamo così ridotti a mostrare che $XP = PY$ e che QP incontra la base minore nel suo punto medio nel caso in cui $ABCD$ sia isoscele. In questo caso le tesi sono però evidenti per simmetria: P si trova sull'asse di AB, CD e XY, che passa per Q.

ESERCIZIO 3 – testo e risoluzione (classica)

Dimostrare che un pentagono inscritto in una circonferenza e tale che ogni sua diagonale sia parallela ad un lato, è necessariamente regolare.

Detto O il centro del cerchio circoscritto al pentagono $ABCDE$, si considerino i due triangoli isosceli BOE e COD: essendo BE parallelo a CD, i due triangoli hanno lo stesso asse r di simmetria. Allora, rispetto alla retta r, il punto B è il simmetrico di E, mentre il punto C è il simmetrico di D. Ne segue $BC = ED$, in quanto segmenti simmetrici rispetto ad r. In modo analogo si dimostra l'uguaglianza delle altre coppie di lati, per cui il pentagono è equilatero.

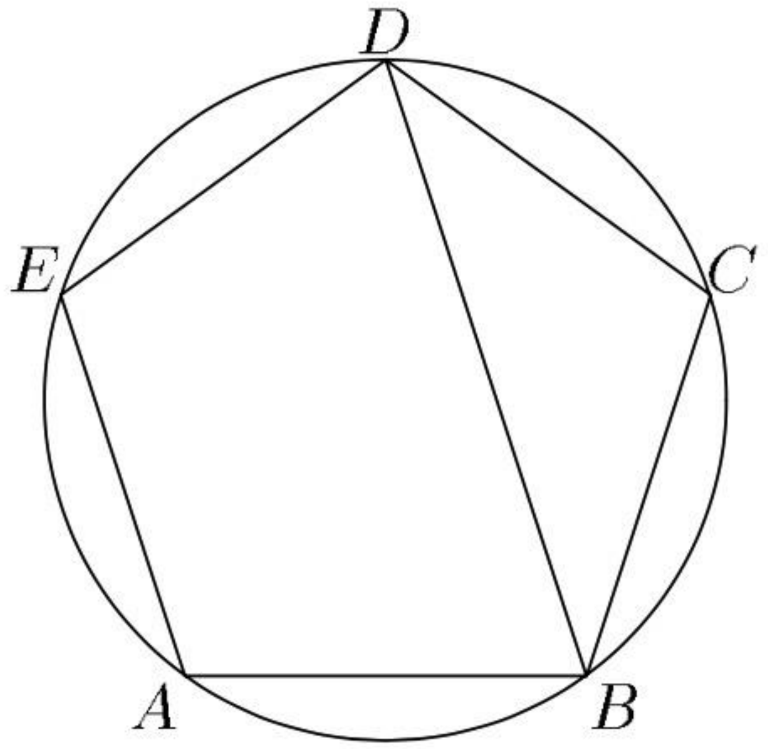
Per dimostrare che anche gli angoli del pentagono sono uguali fra loro, basta ricordare che, per ipotesi, il pentagono è inscrivibile in una circonferenza, ed osservare che a corde uguali corrispondono angoli alla circonferenza uguali.



ESERCIZIO 3 – altre possibili risoluzioni (classiche)

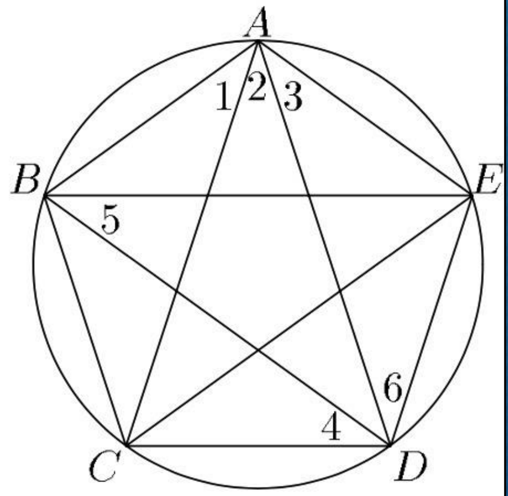
SECONDA SOLUZIONE

L'angolo $E\hat{A}B$ è supplementare di $B\hat{D}E$ poiché angoli opposti di un quadrilatero inscritto in una circonferenza, e $A\hat{E}D$ è supplementare di $B\hat{D}E$ poiché essi sono angoli coniugati interni rispetto alle rette parallele AE e BD tagliate dalla trasversale DE.
Gli angoli $E\hat{A}B$ e $A\hat{E}D$ sono dunque uguali fra loro. Dunque tutti gli angoli adiacenti (e quindi tutti gli angoli) del pentagono sono uguali fra loro.
Il precedente ragionamento porta a concludere che il trapezio $ABDE$ è isoscele, da cui $AB = DE$. Più in generale, due lati non consecutivi del pentagono sono uguali fra loro, e dunque tutti i lati del pentagono sono uguali tra loro.



TERZA SOLUZIONE

Con riferimento al pentagono $ABCDE$ in figura, chiamiamo 1, 2, 3 gli angoli in cui le diagonali del pentagono dividono l'angolo in A; chiamiamo poi 4 l'angolo $B\hat{D}C$ e 5 l'angolo $D\hat{B}E$. Tenendo presente che il pentagono è inscrivibile, si ha
$1 = 4$ perché angoli che sottendono lo stesso arco BC,
$3 = 5$ perché angoli che sottendono lo stesso arco DE.
D'altra parte, si ha anche $4 = 5$, perché angoli alterni interni rispetto alle rette parallele BE e CD tagliate dalla trasversale BD. Si conclude così che $1 = 4 = 5 = 3$.

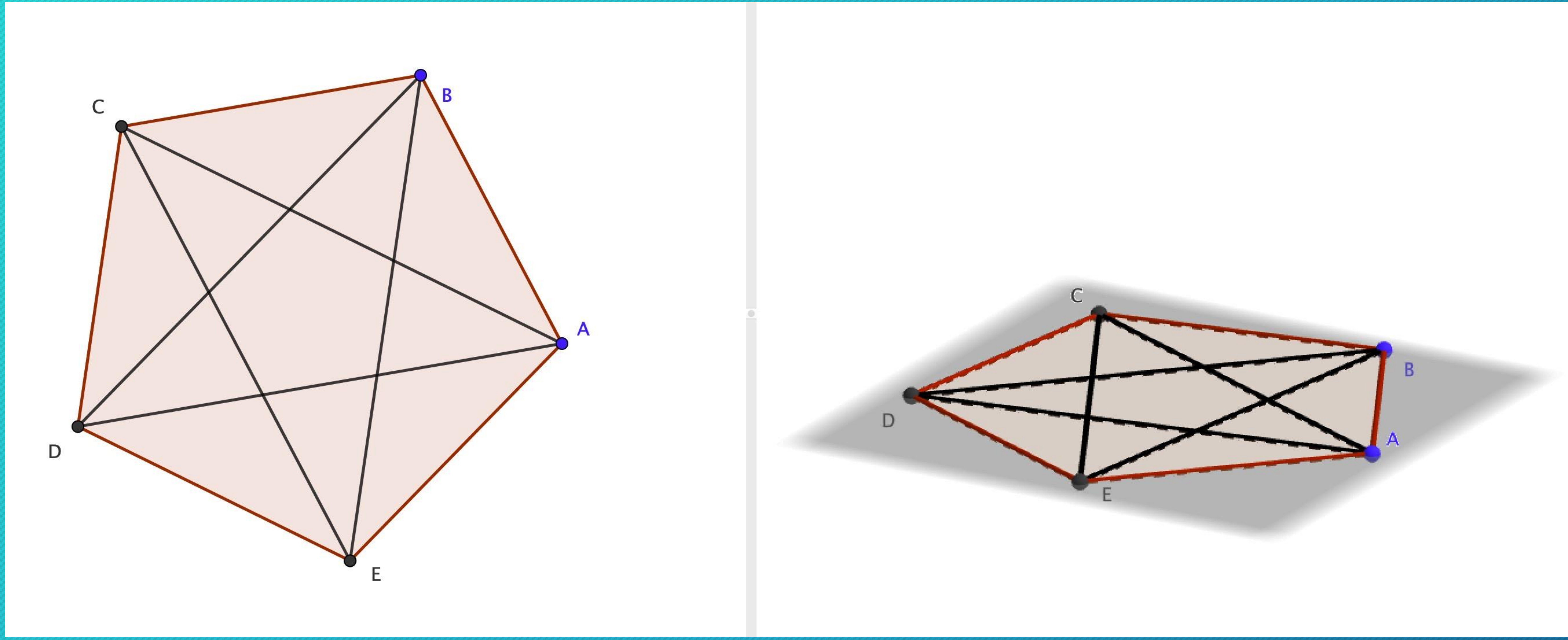


Se ora chiamiamo 6 l'angolo $A\hat{D}E$, si ha $2 = 6$, perché angoli alterni interni rispetto alle rette parallele AC e ED tagliate dalla trasversale AD. Ripetendo il ragionamento visto precedentemente in relazione agli angoli 1 e 3, ma facendo riferimento agli angoli di vertice D (invece che agli angoli di vertice A), si trova $4 = 6$ e, di conseguenza, $1 = 4 = 6 = 2$.
In definitiva, gli angoli 1, 2, 3, in cui le diagonali dividono l'angolo in A sono uguali fra loro; analogamente, la stessa proprietà si dimostra per gli altri angoli. Si ha anche che l'angolo $B\hat{A}E$, essendo il triplo dell'angolo 1, è uguale all'angolo $A\hat{B}C$, che è il triplo dell'angolo 5; procedendo in modo analogo si dimostra che i cinque angoli del pentagono sono uguali fra loro.
Infine, per dimostrare che anche i lati del pentagono sono uguali fra loro, basta ricordare che il pentagono è inscrivibile ed osservare che ad angoli alla circonferenza uguali corrispondono corde uguali.

ESERCIZIO 3 – perché qui? Osservazione sulle affinità

Osserviamo che la sola ipotesi del parallelismo fra lati e diagonali non è sufficiente per concludere che il pentagono è regolare: ad esempio, l'ipotesi citata è soddisfatta dal pentagono avente i vertici nei punti di coordinate $(0,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $(1+\sqrt{5},\ 2)$, $(2,\ 1+\sqrt{5})$, $(0,\ 2)$. Si osservi, d'altra parte, che se si considera un qualsiasi pentagono regolare e lo si trasforma mediante un'affinità, si ottiene un altro pentagono che non è più regolare (a meno che l'affinità non sia una similitudine), ma in cui è ancora vero che ogni diagonale è parallela a un lato.

ESERCIZIO 3 – trasformazione affine (assonometria) del pentagono regolare



il parallelismo è un’invariante: i lati sono rimasti paralleli alle diagonali «opposte»

ATTENTI QUINDI! Non sempre le affinità risolvono!!!

ESERCIZI 4 E 5 - TESTO

Sia $\boldsymbol{O}$ il circocentro di un triangolo acutangolo $\boldsymbol{ABC}$.Si scelgano i punti $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{N}$ sui lati $\boldsymbol{AB}$ e $\boldsymbol{BC}$ rispettivamente in modo tale che l'angolo $\angle \boldsymbol{AOC}$ sia esattamente il doppio dell'angolo $\angle \boldsymbol{MON}$. Dimostrare che il perimetro del triangolo $\boldsymbol{MBN}$ è non minore del lato $\boldsymbol{AC}$.

4

È dato un triangolo acutangolo isoscele ABC di base AC. All'interno di tale triangolo sono dati un punto M, dalla parte di C rispetto all'asse di AC e tale che $C\widehat{M}A = 2C\widehat{B}A$, e un punto N all'interno del segmento AM tale che $B\widehat{N}M = C\widehat{B}A$.

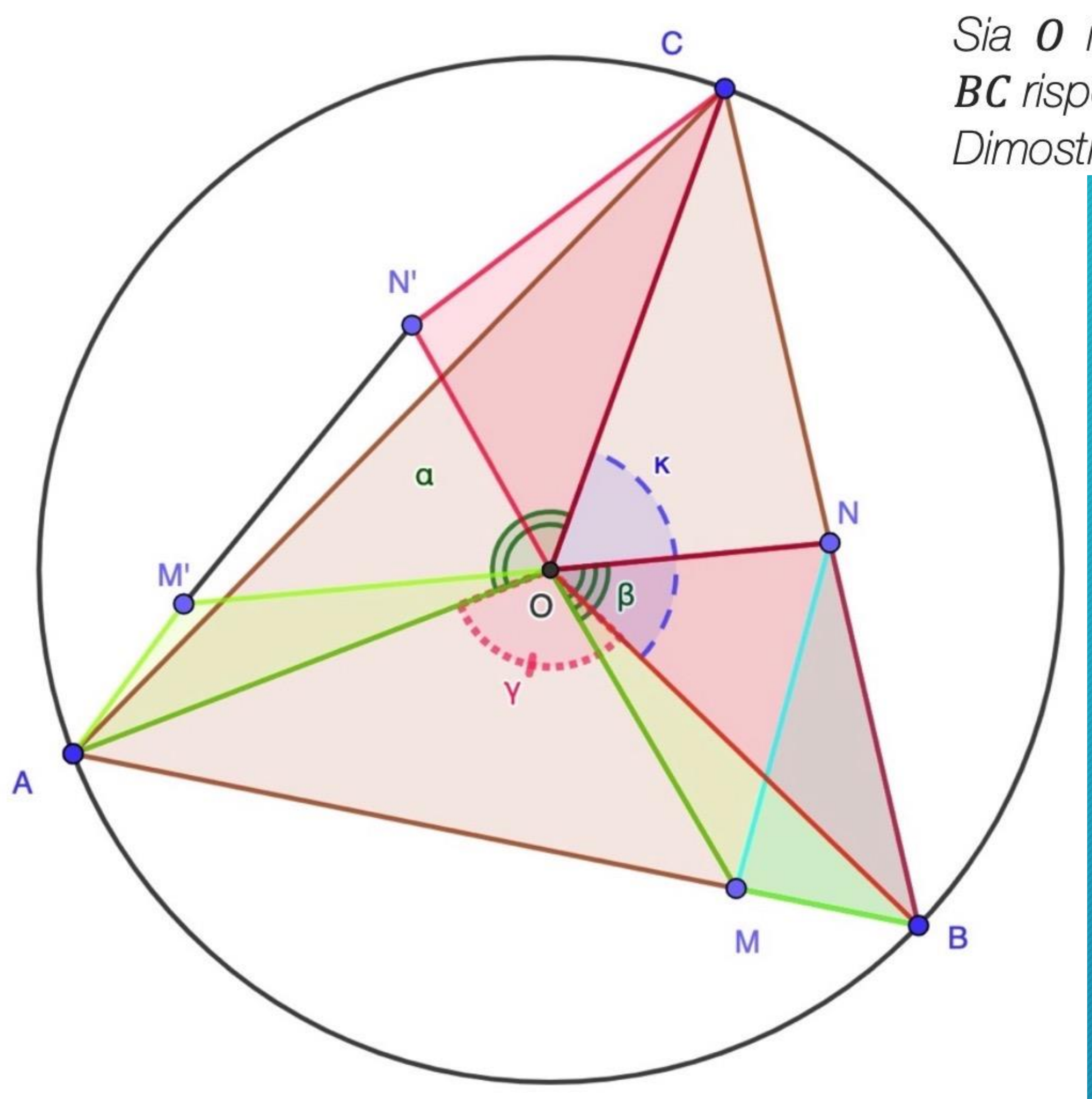
– Dimostrare che $C\widehat{B}N = B\widehat{A}M$.

– Dimostrare che $CM + MN = BN$.

5

ADESSO TOCCA A VOI - DIVIDETEVI IN GRUPPI E PROVATE - AVETE ??? MINUTI A DISPOSIZIONE

ESERCIZIO 4 – risoluzione con trasformazioni (rotazioni)



Sia $\boldsymbol{O}$ il circocentro di un triangolo acutangolo $\boldsymbol{ABC}$.Si scelgano i punti $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{N}$ sui lati $\boldsymbol{AB}$ e $\boldsymbol{BC}$ rispettivamente in modo tale che l'angolo $\angle\boldsymbol{AOC}$ sia esattamente il doppio dell'angolo $\angle\boldsymbol{MON}$. Dimostrare che il perimetro del triangolo $\boldsymbol{MBN}$ è non minore del lato $\boldsymbol{AC}$.

Si ruotino il triangolo $\boldsymbol{BMO}$ e il triangolo $\boldsymbol{BNO}$ intorno all'origine rispettivamente di un angolo $\boldsymbol{\gamma}$ in verso orario e di un angolo $\boldsymbol{\kappa}$ in verso antiorario ottenendo i triangoli $\boldsymbol{AM'O}$ e $\boldsymbol{CN'O}$.
Essendo la rotazione un'isometria, si ha che $MB = M'A, NB = N'C, MO = M'O, NO = N'O,$ $\angle AOM' = \angle BOM, \angle BON = \angle CON'$.

Si ha poi: $\angle MON = \beta = \angle M'ON'$per la seguente dimostrazione:$\boldsymbol{\alpha = 2\beta}$ per ipotesi,
$\angle M'ON' = \angle AOC - \angle N'OC - \angle AOM'$, *ovvero, sostituendo dalle precedenti uguaglianze,*
$\angle M'ON' = \angle AOC - \angle BOM - \angle BON$ *ovvero*
$\angle M'ON' = \angle AOC - (\angle BOM + \angle BON) = \angle AOC - \angle MON = \angle AOC - \beta = \alpha - \beta = 2\beta - \beta = \beta$

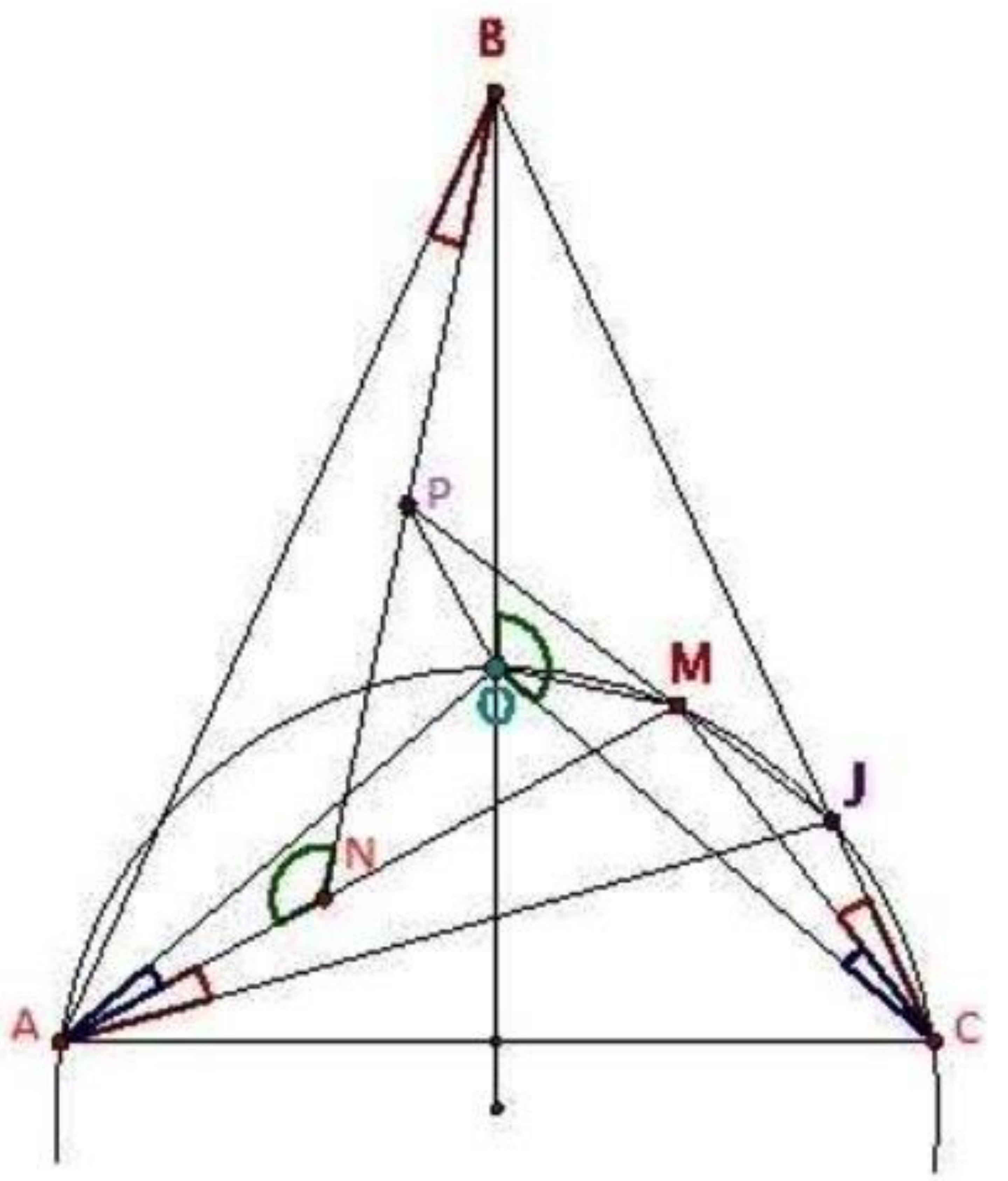
Quindi i triangoli $\boldsymbol{M'ON'}$ e $\boldsymbol{MON}$ sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli.
Ne consegue che $\boldsymbol{MN = M'N'}$.

Concludendo: per il perimetro del triangolo $\boldsymbol{MBN}$ si ha: $\boldsymbol{MB + BN + NM = M'A + N'C + M'N'}$ e, dal momento che ogni linea spezzata con estremi in $\boldsymbol{A}$ e in $\boldsymbol{C}$ è maggiore del segmento $\boldsymbol{AC}$, la tesi è dimostrata.

ESERCIZIO 5 – risoluzione 1 classica (con similitudine)

È dato un triangolo acutangolo isoscele ABC di base AC. All'interno di tale triangolo sono dati un punto M, dalla parte di C rispetto all'asse di AC e tale che $C\widehat{M}A = 2C\widehat{B}A$, e un punto N all'interno del segmento AM tale che $B\widehat{N}M = C\widehat{B}A$.

– Dimostrare che $C\widehat{B}N = B\widehat{A}M$.
– Dimostrare che $CM + MN = BN$.



Sia P il punto di intersezione tra il prolungamento di CM e BN e sia R il punto di intersezione tra il prolungamento di AM e BC; indichiamo inoltre con β l'angolo $C\widehat{B}A$.

Dimostrazione della prima parte

Diamo due dimostrazioni di questo punto.

Primo argomento

Per il teorema dell'angolo esterno applicato all'angolo in N del triangolo ABN, $B\widehat{A}M = B\widehat{A}N = \beta - N\widehat{B}A$. Ma $C\widehat{B}N + N\widehat{B}A = C\widehat{B}A = \beta$, quindi $C\widehat{B}N = \beta - N\widehat{B}A = B\widehat{A}M$.

Secondo argomento

Consideriamo i triangoli ABR e BNR: essi hanno l'angolo in R in comune e gli angoli corrispondenti $R\widehat{B}A$ e $B\widehat{N}R$ uguali a β per ipotesi, quindi sono simili. Ma allora anche $R\widehat{B}N = R\widehat{A}B$ e quindi $C\widehat{B}N = R\widehat{B}N = R\widehat{A}B = B\widehat{A}M$.

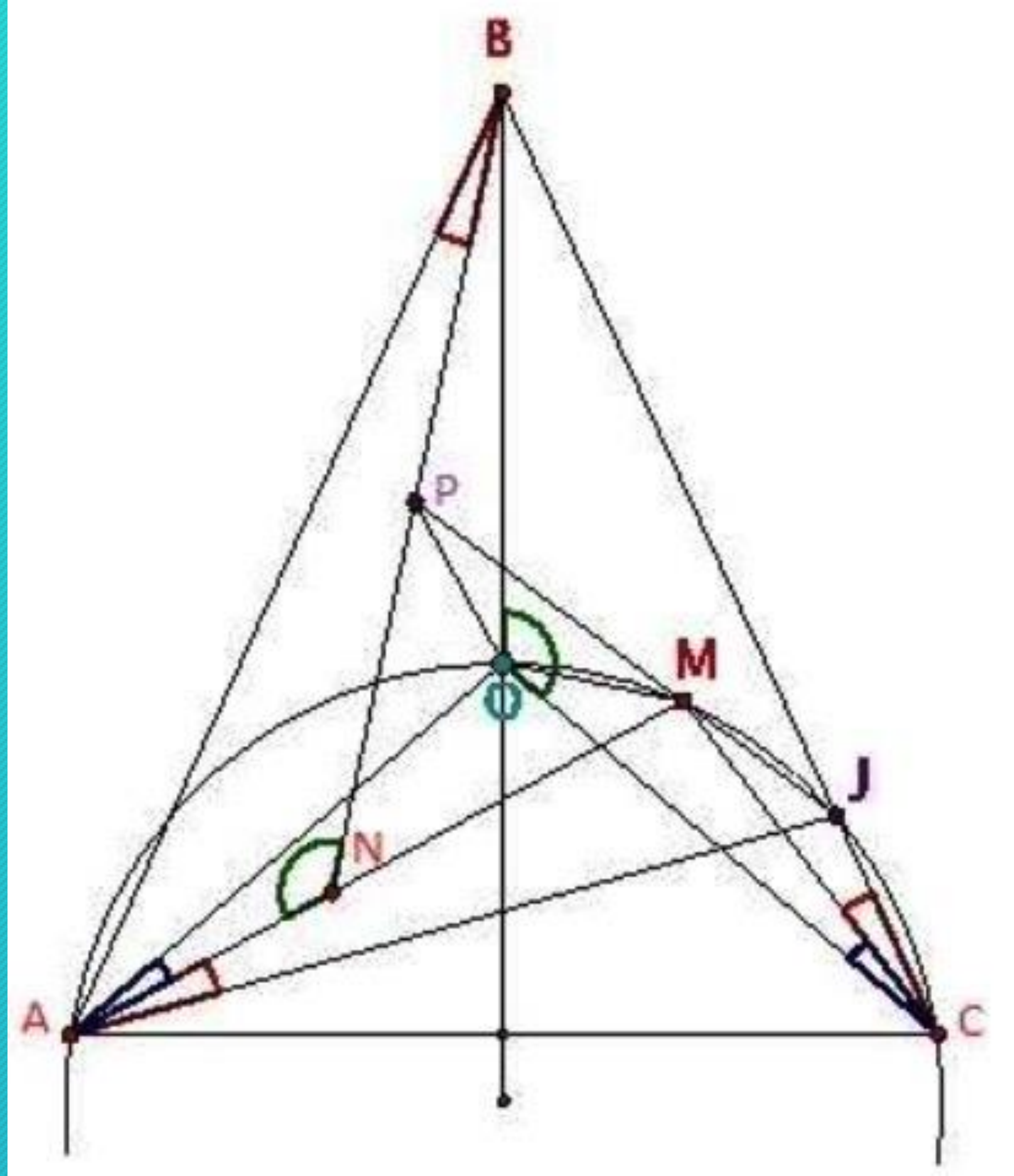
Dimostrazione della seconda parte

Consideriamo ora il triangolo MNP: l'angolo esterno in M è $C\widehat{M}N = C\widehat{M}A$ e vale perciò 2β. Ma per il teorema dell'angolo esterno allora $M\widehat{P}N = 2\beta - P\widehat{N}M = 2\beta - \beta = \beta$ (quindi MNP è isoscele).

Consideriamo infine i triangoli BCP e ABN: gli angoli corrispondenti in P ed in N sono complementari di angoli uguali per quanto appena dimostrato e sono quindi uguali, mentre gli angoli corrispondenti in B ed in A sono uguali per quanto visto nella prima parte. I due triangoli sono quindi simili, anzi congruenti in quanto il lato BC del primo è uguale al lato corrispondente AB del secondo (ABC è isoscele per ipotesi). Quindi anche $CP = BN$ in quanto sono anch'essi lati corrispondenti di questi due triangoli. Ma poiché MNP è isoscele, $CM + MN = CM + MP = CP$ e quindi $CM + MN = BN$, come volevasi dimostrare.

ESERCIZIO 5 – risoluzione 2 con trasformazioni (composizione di simmetrie assiali = rotazione)

È dato un triangolo acutangolo isoscele ABC di base AC. All'interno di tale triangolo sono dati un punto M, dalla parte di C rispetto all'asse di AC e tale che $C\widehat{M}A = 2C\widehat{B}A$, e un punto N all'interno del segmento AM tale che $B\widehat{N}M = C\widehat{B}A$.
– Dimostrare che $C\widehat{B}N = B\widehat{A}M$.
– Dimostrare che $CM + MN = BN$.



SECONDA SOLUZIONE

Denominato α l'angolo $A\widehat{B}C$, il luogo dei punti interni al triangolo ABC che vedono il segmento AC sotto un angolo pari a 2α è un arco di circonferenza Γ passante per il circocentro O di ABC; il teorema dell'angolo al centro garantisce infatti che si abbia $A\widehat{O}C = 2\,A\widehat{B}C$. Poiché ABC è isoscele su base AC ed acutangolo, O si trova lungo l'asse del segmento AC internamente al triangolo, e i triangoli AOB, BOC, COA risultano isosceli. Detta J l'intersezione di Γ con CB e posto $\theta = J\widehat{A}M, \phi = M\widehat{A}O$ si ha:

$$\theta = J\widehat{C}M = J\widehat{A}M \text{ in quanto entrambi sottendono l'arco } JM \text{ in } \Gamma,$$

$$\phi = M\widehat{C}O = M\widehat{A}O \text{ in quanto entrambi sottendono l'arco } MO \text{ in } \Gamma,$$

ma chiaramente $\theta + \phi = B\widehat{C}O = \dfrac{\alpha}{2}$, alché:

$$B\widehat{N}M = \alpha \longrightarrow B\widehat{N}A = C\widehat{O}B = \pi - \alpha,$$

da cui segue $A\widehat{B}N = \theta$. Detta ρ una simmetria rispetto all'asse di AC seguita da una simmetria rispetto all'asse di BA, poniamo $P = \rho(M)$. Poiché le simmetrie preservano gli angoli, PB forma un angolo pari a θ con BA, il che garantisce che P giaccia su BN. La trasformazione ρ, in quanto composizione di simmetrie assiali, è una rotazione antioraria di centro O (intersezione dell'asse di CB e dell'asse di BA) di ampiezza pari a $\pi - \alpha = C\widehat{O}B$, in particolare realizza $CM = BP$ e $OM = OP$. Si ha inoltre:

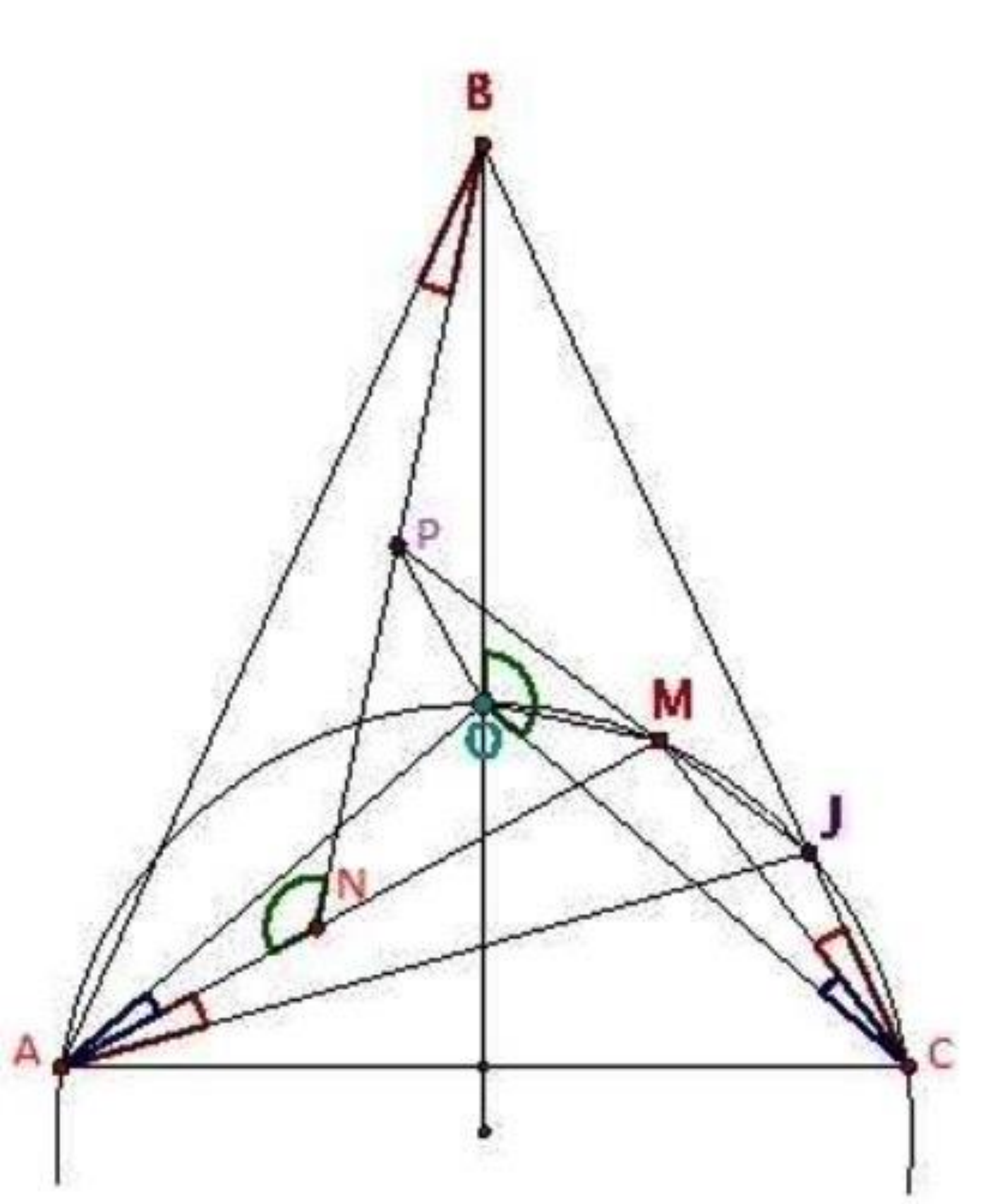
$$O\widehat{M}A = O\widehat{C}A = O\widehat{A}C, \quad O\widehat{P}N = \pi - O\widehat{P}B = \pi - O\widehat{M}C,$$

ma $O\widehat{M}A$ ed $O\widehat{A}C$ sottendono il medesimo arco CO in Γ da parti opposte rispetto al centro, dunque sommano ad un angolo piatto. Il triangolo MNP è conseguentemente isoscele per congruenza degli angoli che insistono su MP e si ha:

$$CM + MN = BP + MN = BP + PN = BN$$

come voluto.

ESERCIZIO 5 – cosa ci insegna?



Che non sempre le trasformazioni semplificano il lavoro!!!

ABBIAMO VISTO

1. definizione di trasformazione (nel piano), invariante, punto e figura unita
2. classificazione delle trasformazioni (isometrie, omotetie, affinità, proiettività, omeomorfismi)
3. isometrie e loro invarianti (es.: identità, traslazioni, simmetrie assiali, simmetrie centrali, rotazioni)
4. omotetie e loro invarianti
5. affinità e loro invarianti (es.: assonometrie)
6. composizione di trasformazioni
7. similitudini
8. omeomorfismi (es.: inversioni circolari)
9. abbiamo usato Geogebra (nella versione on line) per «sperimentare» le trasformazioni
10. abbiamo applicato le trasformazioni ad alcune dimostrazioni di geometria sintetica e compreso quando vale la pena di usarle

GRAZIE PER L'ATTENZIONE

ORIETTA ZANGIACOMI

ex Coordinatore Distrettuale delle Olimpiadi della Matematica del Distretto di Treviso
docente emerita di Matematica del Liceo Scientifico Statale Leonardo da Vinci di Treviso

oriettazangiacomi@gmail.com