

Matematica Olimpica

Maria Archetti

Stage Olimpico Territoriale · Liceo Da Vinci Treviso

Indirizzi e-mail: *archetti.maria@maxplanck.edu.it*

Stage di Matematica Olimpica: Algebra e Teoria dei Numeri

23 Gennaio 2026

Presentazione del corso

Programma

1. Equazioni Diofantee lineari.
2. Equazioni Diofantee non lineari.
3. Applicazioni alle dimostrazioni e ai problemi di Matematica Olimpica.
4. Terne Pitagoriche.
5. Equazione di Pell.

Presentazione del corso

Programma

1. Equazioni Diofantee lineari.
2. Equazioni Diofantee non lineari.
3. Applicazioni alle dimostrazioni e ai problemi di Matematica Olimpica.
4. Terne Pitagoriche.
5. Equazione di Pell.

Presentazione del corso

Programma

1. Equazioni Diofantee lineari.
2. Equazioni Diofantee non lineari.
3. Applicazioni alle dimostrazioni e ai problemi di Matematica Olimpica.
4. Terne Pitagoriche.
5. Equazione di Pell.

Presentazione del corso

Programma

1. Equazioni Diofantee lineari.
2. Equazioni Diofantee non lineari.
3. Applicazioni alle dimostrazioni e ai problemi di Matematica Olimpica.
4. Terne Pitagoriche.
5. Equazione di Pell.

Presentazione del corso

Programma

1. Equazioni Diofantee lineari.
2. Equazioni Diofantee non lineari.
3. Applicazioni alle dimostrazioni e ai problemi di Matematica Olimpica.
4. Terne Pitagoriche.
5. Equazione di Pell.

Materiali e strumenti utili allo studio

Testi consigliati

- Safaei. Suppa, Tupitti “problem solving in algebra e teoria dei numeri”, Collana U Math
- Facchini A. “Algebra e Matematica Discreta”, Decibel Zanichelli
- Franciosi S., De Giovanni F. “Elementi di Algebra", Aracne

Altri materiali e strumenti

- Videolezioni Stage Senior, Stage EGMO

Materiali e strumenti utili allo studio

Testi consigliati

- Safaei. Suppa, Tupitti “problem solving in algebra e teoria dei numeri”, Collana U Math
- Facchini A. “Algebra e Matematica Discreta”, Decibel Zanichelli
- Franciosi S., De Giovanni F. “Elementi di Algebra”, Aracne

Altri materiali e strumenti

- Videolezioni Stage Senior, Stage EGMO

Equazioni Diofantee

Si dicono *EQUAZIONI DIOFANTEE* quelle equazioni algebriche in una o più incognite che hanno per **coefficienti numeri interi** e delle quali interessano esclusivamente le **soluzioni intere**.

L'aggettivo che le qualifica proviene da Diofanto, famoso matematico alessandrino vissuto nel III sec. d. C. che si distinse per lo studio dei numeri interi.

Equazioni Diofantee Lineari

TEOREMA: l'equazione diofantea lineare

$$ax + by = c$$

ammette soluzioni intere se e solo se il massimo comun divisore $d =: \text{MCD}(a, b)$ di a e b divide c .

Equazioni Diofantee Lineari

- CASO OMOGENEO:

$$ax + by = 0, \quad ax = -by$$

se inoltre $d = \text{MCD}(a, b)$ e definiamo $a_1 = \frac{a}{d}$ e $b_1 = \frac{b}{d}$ si ha

$$a_1x = -b_1y, \quad \text{MCD}(a_1, b_1) = 1$$

$a_1 | b_1y$ quindi $a_1 | y$ e $y = a_1h$

$b_1 | a_1x$ quindi $b_1 | x$ e $x = b_1k$ da cui $a_1b_1k = -b_1a_1h$ e quindi $k = -h$

LE SOLUZIONI SONO TUTTE E SOLE DELLA FORMA

$$x = -b_1h, \quad y = a_1h, \quad h \in \mathbb{Z}$$

Equazioni Diofantee Lineari

- CASO OMOGENEO:

$$ax + by = 0, \quad ax = -by$$

se inoltre $d = \text{MCD}(a, b)$ e definiamo $a_1 = \frac{a}{d}$ e $b_1 = \frac{b}{d}$ si ha

$$a_1x = -b_1y, \quad \text{MCD}(a_1, b_1) = 1$$

$a_1|b_1y$ quindi $a_1|y$ e $y = a_1h$

$b_1|a_1x$ quindi $b_1|x$ e $x = b_1k$ da cui $a_1b_1k = -b_1a_1h$ e quindi $k = -h$

LE SOLUZIONI SONO TUTTE E SOLE DELLA FORMA

$$x = -b_1h, \quad y = a_1h, \quad h \in \mathbb{Z}$$

Equazioni Diofantee Lineari

- CASO OMOGENEO:

$$ax + by = 0, \quad ax = -by$$

se inoltre $d = MCD(a, b)$ e definiamo $a_1 = \frac{a}{d}$ e $b_1 = \frac{b}{d}$ si ha

$$a_1x = -b_1y, \quad MCD(a_1, b_1) = 1$$

$a_1 | b_1y$ quindi $a_1 | y$ e $y = a_1h$

$b_1 | a_1x$ quindi $b_1 | x$ e $x = b_1k$ da cui $a_1b_1k = -b_1a_1h$ e quindi $k = -h$

LE SOLUZIONI SONO TUTTE E SOLE DELLA FORMA

$$x = -b_1h, \quad y = a_1h, \quad h \in \mathbb{Z}$$

Equazioni Diofantee Lineari

- **CASO GENERALE:** *osservazione importante* se (x_0, y_0) e (x_1, y_1) sono soluzioni di $ax + by = c$

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 = c \\ ax_1 + by_1 = c \end{cases}$$

allora $a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) = 0$, $(x_0 - x_1, y_0 - y_1)$ è soluzione dell'omogenea!

se (x_0, y_0) è soluzione di $ax + by = c$, allora ogni altra soluzione è della forma

$$x = x_0 - b_1 h, \quad y = y_0 + a_1 h, \quad h \in \mathbb{Z}$$

Equazioni Diofantee Lineari

- **CASO GENERALE:** *osservazione importante* se (x_0, y_0) e (x_1, y_1) sono soluzioni di $ax + by = c$

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 = c \\ ax_1 + by_1 = c \end{cases}$$

allora $a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) = 0$, $(x_0 - x_1, y_0 - y_1)$ è soluzione dell'omogenea!

se (x_0, y_0) è soluzione di $ax + by = c$, allora ogni altra soluzione è della forma

$$x = x_0 - b_1 h, \quad y = y_0 + a_1 h, \quad h \in \mathbb{Z}$$

Equazioni Diofantee Lineari

- **CASO GENERALE:** *osservazione importante* se (x_0, y_0) e (x_1, y_1) sono soluzioni di $ax + by = c$

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 = c \\ ax_1 + by_1 = c \end{cases}$$

allora $a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) = 0$, $(x_0 - x_1, y_0 - y_1)$ è soluzione dell'omogenea!

se (x_0, y_0) è soluzione di $ax + by = c$, allora ogni altra soluzione è della forma

$$x = x_0 - b_1 h, \quad y = y_0 + a_1 h, \quad h \in \mathbb{Z}$$

Equazioni Diofantee Lineari

Ma come si trova (x_0, y_0) ?

1) Per tentativi!

$$3x + 2y = 5 \quad (x_0, y_0) = (1, 1)$$

$$1024x + 337y = 248 \quad (x_0, y_0) = ???$$

2) *Possiamo ricondurci al caso $c=1$*

Se $(\tilde{x}, \tilde{y})$ risolve $ax + by = 1$ allora $(x_0, y_0) = (c\tilde{x}, c\tilde{y})$ risolve $ax + by = c$

Esempio: $3x + 7y = 5$; $(5, -2)$ risolve $3x + 7y = 1$, si ha che $(25, -10)$ è soluzione di $3x + 7y = 5$.

Equazioni Diofantee Lineari

Come risolvo $ax + by = 1$ con $(a, b) = 1$?

ALGORITMO DI EUCLIDE

ESEMPIO: $31x + 19y = 13$, cerchiamo le soluzioni di $31x + 19y = 1$.
Applichiamo le divisioni con resto

$$31 = 19 \cdot 1 + 12 \Rightarrow q_0 = 1, r_1 = 12$$

$$19 = 12 \cdot 1 + 7 \Rightarrow q_1 = 1, r_2 = 7$$

$$12 = 7 \cdot 1 + 5 \Rightarrow q_2 = 1, r_3 = 5$$

$$7 = 5 \cdot 1 + 2 \Rightarrow q_3 = 1, r_4 = 2$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1 \Rightarrow q_4 = 2, r_5 = 1$$

Equazioni Diofantee Lineari

Cerchiamo le soluzioni di $31x + 19y = 1$

$$\begin{aligned}1 &= 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2(7 - 5) \\&= 5 - 2 \cdot 7 + 2 \cdot 5 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 \\&= 3(12 - 7) - 2 \cdot 7 = 3 \cdot 12 - 5 \cdot 7 \\&= 3 \cdot 12 - 5(19 - 12) = 8 \cdot 12 - 5 \cdot 19 \\&= 8(31 - 19) - 5 \cdot 19 = 8 \cdot 31 - 13 \cdot 19\end{aligned}$$

Abbiamo $8 \cdot 31 - 13 \cdot 19 = 1$ da cui la soluzione $(8, -13)$.

Una soluzione di $31x + 19y = 13$ sarà $(104, -169)$.

Le soluzioni totali $(104 - 19h, -169 + 31h)$

Equazioni Diofantee Lineari

Schema riassuntivo per la risoluzione di $ax + by = c$ con $MCD(a, b) | c$

1- Divido tutto per $MCD(a, b)$, ottenendo $a_1x + b_1y = c_1$,

dove $a_1 = \frac{a}{d}$ e $b_1 = \frac{b}{d}$ e si ha $MCD(a_1, b_1) = 1$

2- Risolvo l'omogenea trovando $(-b_1h, a_1h)$, $h \in \mathbb{Z}$

3- Trovo (x_0, y_0) una soluzione particolare di $a_1x + b_1y = c_1$ e scrivo la soluzione generale come

$$(x = x_0 - b_1h, \quad y = y_0 + a_1h), \quad h \in \mathbb{Z}$$

Equazioni Diofantee Lineari

Schema riassuntivo per la risoluzione di $ax + by = c$ con $MCD(a, b) | c$

1- Divido tutto per $MCD(a, b)$, ottenendo $a_1x + b_1y = c_1$,

dove $a_1 = \frac{a}{d}$ e $b_1 = \frac{b}{d}$ e si ha $MCD(a_1, b_1) = 1$

2- Risolvo l'omogenea trovando $(-b_1h, a_1h)$, $h \in \mathbb{Z}$

3- Trovo (x_0, y_0) una soluzione particolare di $a_1x + b_1y = c_1$ e scrivo la soluzione generale come

$$(x = x_0 - b_1h, \quad y = y_0 + a_1h), \quad h \in \mathbb{Z}$$

Equazioni Diofantee Lineari

Schema riassuntivo per la risoluzione di $ax + by = c$ con $MCD(a, b) | c$

1- Divido tutto per $MCD(a, b)$, ottenendo $a_1x + b_1y = c_1$,

dove $a_1 = \frac{a}{d}$ e $b_1 = \frac{b}{d}$ e si ha $MCD(a_1, b_1) = 1$

2- Risolvo l'omogenea trovando $(-b_1h, a_1h)$, $h \in \mathbb{Z}$

3- Trovo (x_0, y_0) una soluzione particolare di $a_1x + b_1y = c_1$ e scrivo la soluzione generale come

$$(x = x_0 - b_1h, \quad y = y_0 + a_1h), \quad h \in \mathbb{Z}$$

Congruenze e classi resto

DEF[CLASSI RESTO]: dato $m \geq 2$ intero positivo definiamo

CLASSI RESTO modulo m

$$[0]_m = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \div m \text{ resto} = 0\}$$

$$[1]_m = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \div m \text{ resto} = 1\}$$

...

$$[m-1]_m = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \div m \text{ resto} = m-1\}$$

Congruenze e classi resto

DEF[CLASSI RESTO]: dato $m \geq 2$ intero positivo definiamo

CLASSI RESTO modulo m

$$[0]_m = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \div m \text{ resto} = 0\}$$

$$[1]_m = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \div m \text{ resto} = 1\}$$

...

$$[m-1]_m = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \div m \text{ resto} = m-1\}$$

Congruenze e classi resto

DEF[CLASSI RESTO]: dato $m \geq 2$ intero positivo definiamo

CLASSI RESTO modulo m

$$[0]_m = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \div m \text{ resto} = 0\}$$

$$[1]_m = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \div m \text{ resto} = 1\}$$

...

$$[m-1]_m = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \div m \text{ resto} = m-1\}$$

Congruenze e classi resto

Se due interi a, b stanno nella stessa classe modulo m diremo che

a congruo b modulo m

DEF: $m \geq 2$ intero positivo; $a, b \in \mathbb{Z}$

$$a \equiv b \pmod{m} \iff a - b = k \cdot m, \iff a = b + km, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ESEMPLI: $17 \in [2]_5 \quad -17 \equiv_5 -2 \equiv_5 3, \quad 87 \equiv 22 \pmod{5}.$

Congruenze e classi resto

Se due interi a, b stanno nella stessa classe modulo m diremo che

a congruo b modulo m

DEF: $m \geq 2$ intero positivo; $a, b \in \mathbb{Z}$

$$a \equiv b \pmod{m} \iff a - b = k \cdot m, \iff a = b + km, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ESEMPI: $17 \in [2]_5 \quad -17 \equiv_5 -2 \equiv_5 3, \quad 87 \equiv 22 \pmod{5}.$

Equazioni Diofantee Lineari

Come risolvo $31x + 19y = 13$?

CON LE CONGRUENZE

$31x \equiv_{19} 13$, $-7x \equiv_{19} 13$, *devo trovare l'inverso di -7 modulo 19!*

$$-7 \cdot (-11) = 77 \equiv_{19} 1$$

Quindi moltiplicando $-7x \equiv_{19} 13$ per -11 otteniamo
 $x \equiv_{19} -143 \equiv_{19} 104 = -143 + 19 \cdot 13$. Sostituendo nell'equazione di partenza $x = 104 - 19h$ otteniamo $31(104 - 19h) + 19y = 13$ da cui
 $19y = 13 - 31 \cdot 104 + 31 \cdot 19h$, $19y = -3211 + 31 \cdot 19h$ e dividendo per 19
otteniamo $y = -169 + 31h$.

Le soluzioni totali $(104 - 19h, -169 + 31h)$

Equazioni Diofantee Lineari

Equazioni Diofantee Lineari in 3 o più variabili

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$$

ammette soluzioni intere se e solo se $MCD(a_1, \dots, a_n) | c$.

- 1- Divido tutto per MCD
- 2- Risolvo l'omogenea associata
- 3- Trovo una soluzione particolare dell'equazione completa e scrivo la soluzione generale come somma della soluzione particolare più le soluzioni dell'omogenea associata.

Equazioni Diofantee Lineari

Equazioni Diofantee Lineari in 3 o più variabili

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$$

ammette soluzioni intere se e solo se $MCD(a_1, \dots, a_n) | c$.

- 1- Divido tutto per MCD
- 2- Risolvo l'omogenea associata
- 3- Trovo una soluzione particolare dell'equazione completa e scrivo la soluzione generale come somma della soluzione particolare più le soluzioni dell'omogenea associata.

Equazioni Diofantee Lineari

Equazioni Diofantee Lineari in 3 o più variabili

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$$

ammette soluzioni intere se e solo se $MCD(a_1, \dots, a_n) | c$.

- 1- Divido tutto per MCD
- 2- Risolvo l'omogenea associata
- 3- Trovo una soluzione particolare dell'equazione completa e scrivo la soluzione generale come somma della soluzione particolare più le soluzioni dell'omogenea associata.

Equazioni Diofantee Lineari

Equazioni Diofantee Lineari in 3 o più variabili

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$$

ammette soluzioni intere se e solo se $MCD(a_1, \dots, a_n) | c$.

- 1- Divido tutto per MCD
- 2- Risolvo l'omogenea associata
- 3- Trovo una soluzione particolare dell'equazione completa e scrivo la soluzione generale come somma della soluzione particolare più le soluzioni dell'omogenea associata.

Equazioni Diofantee Lineari

Equazioni Diofantee Lineari in 3 o più variabili

$$12x + 45y + 20z = 20$$

Osserviamo che $\text{MCD}(12, 45, 20)=1$, quindi l'equazione ammette soluzioni.

Cerchiamo le soluzioni dell'omogenea associata $12x + 45y + 20z = 0$:

poniamo $y = 4k$, allora $12x + 45 \cdot 4k + 20z = 0$, dividendo per 4 si ha $3x + 5z = -45k$, se $z = 3h$ si ha $3x + 15h = -45k$

$$\begin{cases} x = -5h - 15k \\ y = 4k \\ z = 3h \end{cases}$$

al variare di $h, k \in \mathbb{Z}$

Equazioni Diofantee Lineari

Equazioni Diofantee Lineari in 3 o più variabili

$$12x + 45y + 20z = 20$$

Osserviamo che $\text{MCD}(12, 45, 20)=1$, quindi l'equazione ammette soluzioni.

Cerchiamo le soluzioni dell'omogenea associata $12x + 45y + 20z = 0$:

poniamo $y = 4k$, allora $12x + 45 \cdot 4k + 20z = 0$, dividendo per 4 si ha $3x + 5z = -45k$, se $z = 3h$ si ha $3x + 15h = -45k$

$$\begin{cases} x = -5h - 15k \\ y = 4k \\ z = 3h \end{cases}$$

al variare di $h, k \in \mathbb{Z}$

Equazioni Diofantee Lineari

Equazioni Diofantee Lineari in 3 o più variabili

$$12x + 45y + 20z = 20$$

Osserviamo che $\text{MCD}(12, 45, 20)=1$, quindi l'equazione ammette soluzioni.

Cerchiamo le soluzioni dell'omogenea associata $12x + 45y + 20z = 0$:

poniamo $y = 4k$, allora $12x + 45 \cdot 4k + 20z = 0$, dividendo per 4 si ha $3x + 5z = -45k$, se $z = 3h$ si ha $3x + 15h = -45k$

$$\begin{cases} x = -5h - 15k \\ y = 4k \\ z = 3h \end{cases}$$

al variare di $h, k \in \mathbb{Z}$

Equazioni Diofantee Lineari

Equazioni Diofantee Lineari in 3 o più variabili

$$12x + 45y + 20z = 20$$

Osserviamo che $\text{MCD}(12, 45, 20)=1$, quindi l'equazione ammette soluzioni.

Cerchiamo le soluzioni dell'omogenea associata $12x + 45y + 20z = 0$:

poniamo $y = 4k$, allora $12x + 45 \cdot 4k + 20z = 0$, dividendo per 4 si ha $3x + 5z = -45k$, se $z = 3h$ si ha $3x + 15h = -45k$

$$\begin{cases} x = -5h - 15k \\ y = 4k \\ z = 3h \end{cases}$$

al variare di $h, k \in \mathbb{Z}$

Equazioni Diofantee Lineari

Equazioni Diofantee Lineari in 3 o più variabili

$$12x + 45y + 20z = 20$$

Trovo una soluzione particolare dell'equazione completa e scrivo la soluzione generale come somma della soluzione particolare più le soluzioni dell'omogenea associata.

Una soluzione particolare dell'equazione completa è $(0, 0, 1)$

L'insieme delle soluzioni risulta

$$\begin{cases} x = -5h - 15k \\ y = 4k \\ z = 1 + 3h \end{cases}$$

al variare di $h, k \in \mathbb{Z}$

Equazioni Diofantee Lineari

Equazioni Diofantee Lineari in 3 o più variabili

$$12x + 45y + 20z = 20$$

Trovo una soluzione particolare dell'equazione completa e scrivo la soluzione generale come somma della soluzione particolare più le soluzioni dell'omogenea associata.

Una soluzione particolare dell'equazione completa è $(0, 0, 1)$

L'insieme delle soluzioni risulta

$$\begin{cases} x = -5h - 15k \\ y = 4k \\ z = 1 + 3h \end{cases}$$

al variare di $h, k \in \mathbb{Z}$

Equazioni Diofantee Lineari

Equazioni Diofantee Lineari in 3 o più variabili

$$12x + 45y + 20z = 20$$

Trovo una soluzione particolare dell'equazione completa e scrivo la soluzione generale come somma della soluzione particolare più le soluzioni dell'omogenea associata.

Una soluzione particolare dell'equazione completa è $(0, 0, 1)$

L'insieme delle soluzioni risulta

$$\begin{cases} x = -5h - 15k \\ y = 4k \\ z = 1 + 3h \end{cases}$$

al variare di $h, k \in \mathbb{Z}$

Equazioni Diofantee di secondo grado

Determinare tutte le soluzioni intere delle seguenti equazioni

1- $x^2 - y^2 = 2024$

2- $ab - 3a + 4b = 10$

3- $ab - 3a^2 + 4b = 10$

4- $2s^2 + 5t^2 = 102$

Equazioni Diofantee di secondo grado

$$x^2 - y^2 = 2024$$

$$(x - y)(x + y) = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$$

cambio di variabile $d_1 \cdot d_2 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$,

$$\begin{cases} x + y = d_1 \\ x - y = d_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{d_1 + d_2}{2} \\ y = \frac{d_1 - d_2}{2} \end{cases}$$

x, y devono essere interi quindi d_1, d_2 entrambi pari o entrambi dispari. In questo caso il loro prodotto è pari quindi d_1, d_2 devono essere entrambi pari.

Ora basta calcolare tutte le possibilità

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2, 1012 & -2, -1012 \\ 4, 506 & -4, -506 \\ 22, 4 \cdot 23 & -22, -4 \cdot 23 \\ \dots & \end{array} \right.$$

Equazioni Diofantee di secondo grado

$$x^2 - y^2 = 2024$$

$$(x - y)(x + y) = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$$

cambio di variabile $d_1 \cdot d_2 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$,

$$\begin{cases} x + y = d_1 \\ x - y = d_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{d_1 + d_2}{2} \\ y = \frac{d_1 - d_2}{2} \end{cases}$$

x, y devono essere interi quindi d_1, d_2 entrambi pari o entrambi dispari. In questo caso il loro prodotto è pari quindi d_1, d_2 devono essere entrambi pari.

Ora basta calcolare tutte le possibilità

$$\begin{cases} 2, 1012 & -2, -1012 \\ 4, 506 & -4, -506 \\ 22, 4 \cdot 23 & -22, -4 \cdot 23 \\ \dots & \end{cases}$$

Equazioni Diofantee di secondo grado

SOLUZIONE di $ab - 3a + 4b = 10$

proviamo anche qui a fattorizzare

$$ab - 3a + 4b - 12 + 12 = 10$$

$$a(b - 3) + 4(b - 3) + 12 = 10, \quad (a + 4)(b - 3) = -2$$

le uniche possibilità sono

$$\begin{cases} a + 4 = 2 \\ b - 3 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a + 4 = -2 \\ b - 3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a + 4 = 1 \\ b - 3 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} a + 4 = -1 \\ b - 3 = 2 \end{cases}$$

Equazioni Diofantee di secondo grado

SOLUZIONE di $ab - 3a + 4b = 10$

proviamo anche qui a fattorizzare

$$ab - 3a + 4b - 12 + 12 = 10$$

$$a(b - 3) + 4(b - 3) + 12 = 10, \quad (a + 4)(b - 3) = -2$$

le uniche possibilità sono

$$\begin{cases} a + 4 = 2 \\ b - 3 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a + 4 = -2 \\ b - 3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a + 4 = 1 \\ b - 3 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} a + 4 = -1 \\ b - 3 = 2 \end{cases}$$

Equazioni Diofantee di secondo grado

SOLUZIONE di $ab - 3a + 4b = 10$

proviamo anche qui a fattorizzare

$$ab - 3a + 4b - 12 + 12 = 10$$

$$a(b - 3) + 4(b - 3) + 12 = 10, \quad (a + 4)(b - 3) = -2$$

le uniche possibilità sono

$$\begin{cases} a + 4 = 2 \\ b - 3 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a + 4 = -2 \\ b - 3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a + 4 = 1 \\ b - 3 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} a + 4 = -1 \\ b - 3 = 2 \end{cases}$$

Equazioni Diofantee di secondo grado

SOLUZIONE di $ab - 3a + 4b = 10$

proviamo anche qui a fattorizzare

$$ab - 3a + 4b - 12 + 12 = 10$$

$$a(b - 3) + 4(b - 3) + 12 = 10, \quad (a + 4)(b - 3) = -2$$

le uniche possibilità sono

$$\begin{cases} a + 4 = 2 \\ b - 3 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a + 4 = -2 \\ b - 3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a + 4 = 1 \\ b - 3 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} a + 4 = -1 \\ b - 3 = 2 \end{cases}$$

Equazioni Diofantee di secondo grado

SOLUZIONE di $ab - 3a^2 + 4b = 10$

Metodo: eliminazione di una variabile

$$(a+4)b = 3a^2 \quad b = \frac{3a^2 + 10}{a+4} = \frac{3a(a+4) - 12a + 10}{a+4}$$

$$b = 3a - \frac{12a - 10}{a+4} = 3a - \frac{12(a+4) - 48 - 10}{a+4}$$

$$b = 3a - 12 + \frac{58}{a+4} \in \mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad (a+4) \mid 58$$

$$58 = 2 \cdot 29 \quad a+4 = \pm 1, \pm 2, \pm 29, \pm 58$$

Equazioni Diofantee di secondo grado

SOLUZIONE di $ab - 3a^2 + 4b = 10$

Metodo: eliminazione di una variabile

$$(a+4)b = 3a^2 \quad b = \frac{3a^2 + 10}{a+4} = \frac{3a(a+4) - 12a + 10}{a+4}$$

$$b = 3a - \frac{12a - 10}{a+4} = 3a - \frac{12(a+4) - 48 - 10}{a+4}$$

$$b = 3a - 12 + \frac{58}{a+4} \in \mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad (a+4) \mid 58$$

$$58 = 2 \cdot 29 \quad a+4 = \pm 1, \pm 2, \pm 29, \pm 58$$

Equazioni Diofantee di secondo grado

SOLUZIONE di $ab - 3a^2 + 4b = 10$

Metodo: eliminazione di una variabile

$$(a+4)b = 3a^2 \quad b = \frac{3a^2 + 10}{a+4} = \frac{3a(a+4) - 12a + 10}{a+4}$$

$$b = 3a - \frac{12a - 10}{a+4} = 3a - \frac{12(a+4) - 48 - 10}{a+4}$$

$$b = 3a - 12 + \frac{58}{a+4} \in \mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad (a+4) \mid 58$$

$$58 = 2 \cdot 29 \quad a+4 = \pm 1, \pm 2, \pm 29, \pm 58$$

Equazioni Diofantee di secondo grado

SOLUZIONE di $ab - 3a^2 + 4b = 10$

Metodo: eliminazione di una variabile

$$(a+4)b = 3a^2 \quad b = \frac{3a^2 + 10}{a+4} = \frac{3a(a+4) - 12a + 10}{a+4}$$

$$b = 3a - \frac{12a - 10}{a+4} = 3a - \frac{12(a+4) - 48 - 10}{a+4}$$

$$b = 3a - 12 + \frac{58}{a+4} \in \mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad (a+4) \mid 58$$

$$58 = 2 \cdot 29 \quad a+4 = \pm 1, \pm 2, \pm 29, \pm 58$$

Equazioni Diofantee di secondo grado

SOLUZIONE di $ab - 3a^2 + 4b = 10$

Metodo: eliminazione di una variabile

$$(a+4)b = 3a^2 \quad b = \frac{3a^2 + 10}{a+4} = \frac{3a(a+4) - 12a + 10}{a+4}$$

$$b = 3a - \frac{12a - 10}{a+4} = 3a - \frac{12(a+4) - 48 - 10}{a+4}$$

$$b = 3a - 12 + \frac{58}{a+4} \in \mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad (a+4) \mid 58$$

$$58 = 2 \cdot 29 \quad a+4 = \pm 1, \pm 2, \pm 29, \pm 58$$

Equazioni Diofantee di secondo grado

SOLUZIONE di $2s^2 + 5t^2 = 102$

Osserviamo che se (s, t) è soluzione lo sono anche $(-s, -t)$, $(-s, t)$, $(s, -t)$.

Proviamo a ricondurci ad un numero finito di tentativi

$$\begin{cases} 2s^2 \leq 102 & |s| \leq \sqrt{51} & |s| \leq 7 \\ 5t^2 \leq 102 & |t| \leq \sqrt{\frac{102}{5}} & |t| \leq 4 \end{cases}$$

Il numero di tentativi è finito! Provo tutti i casi possibili.

Equazioni Diofantee di secondo grado

SOLUZIONE di $2s^2 + 5t^2 = 102$

Osserviamo che se (s, t) è soluzione lo sono anche $(-s, -t)$, $(-s, t)$, $(s, -t)$.

Proviamo a ricondurci ad un numero finito di tentativi

$$\begin{cases} 2s^2 \leq 102 & |s| \leq \sqrt{51} & |s| \leq 7 \\ 5t^2 \leq 102 & |t| \leq \sqrt{\frac{102}{5}} & |t| \leq 4 \end{cases}$$

Il numero di tentativi è finito! Provo tutti i casi possibili.

Problemi sulle Equazioni Diofantee

- 1- Dimostrare che l'equazione $x^2 - 7y^2 = 3$ non ha soluzioni intere.
- 2- Dimostrare che l'equazione $3x^2 - 5y^2 = 4$ non ha soluzioni intere.
- 3- Determinare se esistono primi p l'equazione $x^2 + px - 222p = 0$ ha soluzioni intere.
- 4- Determinare tutti i valori di $x, y, z, w \in \mathbb{N}$ che soddisfano

$$2^x + 3^y + 5^z = 7^w$$

Soluzioni Problemi

SOLUZIONE Problema 1: $x^2 - 7y^2 = 3$ **non ha soluzioni intere**

Se un'equazione ha soluzioni intere allora ammette soluzione anche modulo m per ogni intero $m \geq 2$.

Di conseguenza, se risulta IMPOSSIBILE per qualche m , l'equazione non avrà soluzioni intere.

Considerando l'equazione mod 7 otteniamo

$x^2 \equiv_7 3$, ma i quadrati mod 7 sono $0, 1, 4, 9 \equiv_7 2$.

L'equazione risulta impossibile mod 7 e quindi impossibile in $\mathbb{Z}$.

Soluzioni Problemi

SOLUZIONE Problema 1: $x^2 - 7y^2 = 3$ **non ha soluzioni intere**

Se un'equazione ha soluzioni intere allora ammette soluzione anche modulo m per ogni intero $m \geq 2$.

Di conseguenza, se risulta IMPOSSIBILE per qualche m , l'equazione non avrà soluzioni intere.

Considerando l'equazione mod 7 otteniamo

$x^2 \equiv_7 3$, ma i quadrati mod 7 sono $0, 1, 4, 9 \equiv_7 2$.

L'equazione risulta impossibile mod 7 e quindi impossibile in $\mathbb{Z}$.

Soluzioni Problemi

SOLUZIONE Problema 1: $x^2 - 7y^2 = 3$ **non ha soluzioni intere**

Se un'equazione ha soluzioni intere allora ammette soluzione anche modulo m per ogni intero $m \geq 2$.

Di conseguenza, se risulta IMPOSSIBILE per qualche m , l'equazione non avrà soluzioni intere.

Considerando l'equazione mod 7 otteniamo

$x^2 \equiv_7 3$, ma i quadrati mod 7 sono 0, 1, 4, $9 \equiv_7 2$.

L'equazione risulta impossibile mod 7 e quindi impossibile in $\mathbb{Z}$.

SOLUZIONE Problema 2: $3x^2 - 5y^2 = 4$ **non ha soluzioni intere**

Considerando l'equazione mod 5 otteniamo $3x^2 \equiv_5 4$,

3 risulta invertibile mod 5, il suo inverso è 2 infatti $3 \cdot 2 = 6 \equiv_5 1$

Moltiplicando per 2 otteniamo quindi

$x^2 \equiv_5 8 \equiv_5 3$, ma i quadrati mod 5 sono 0, 1, $4 \equiv_5 -1$.

L'equazione risulta impossibile mod 5 e quindi impossibile in $\mathbb{Z}$.

SOLUZIONE Problema 2: $3x^2 - 5y^2 = 4$ **non ha soluzioni intere**

Considerando l'equazione mod 5 otteniamo $3x^2 \equiv_5 4$,

3 risulta invertibile mod 5, il suo inverso è 2 infatti $3 \cdot 2 = 6 \equiv_5 1$

Moltiplicando per 2 otteniamo quindi

$x^2 \equiv_5 8 \equiv_5 3$, ma i quadrati mod 5 sono $0, 1, 4 \equiv_5 -1$.

L'equazione risulta impossibile mod 5 e quindi impossibile in $\mathbb{Z}$.

SOLUZIONE Problema 2: $3x^2 - 5y^2 = 4$ **non ha soluzioni intere**

Considerando l'equazione mod 5 otteniamo $3x^2 \equiv_5 4$,

3 risulta invertibile mod 5, il suo inverso è 2 infatti $3 \cdot 2 = 6 \equiv_5 1$

Moltiplicando per 2 otteniamo quindi

$x^2 \equiv_5 8 \equiv_5 3$, ma i quadrati mod 5 sono 0, 1, $4 \equiv_5 -1$.

L'equazione risulta impossibile mod 5 e quindi impossibile in $\mathbb{Z}$.

SOLUZIONE Problema 2: $3x^2 - 5y^2 = 4$ **non ha soluzioni intere**

Considerando l'equazione mod 5 otteniamo $3x^2 \equiv_5 4$,

3 risulta invertibile mod 5, il suo inverso è 2 infatti $3 \cdot 2 = 6 \equiv_5 1$

Moltiplicando per 2 otteniamo quindi

$x^2 \equiv_5 8 \equiv_5 3$, ma i quadrati mod 5 sono 0, 1, $4 \equiv_5 -1$.

L'equazione risulta impossibile mod 5 e quindi impossibile in $\mathbb{Z}$.

Soluzioni Problemi

SOLUZIONE Problema 3: per quali primi p l'equazione $x^2 + px - 222p = 0$ ha soluzioni intere?

$$\begin{aligned} p &= \frac{x^2}{222 - x} = \frac{x^2 - 222^2 + 222^2}{222 - x} = \frac{(x - 222)(x + 222) + 222^2}{222 - x} = \\ &= -x - 222 + \frac{222^2}{222 - x} \end{aligned}$$

Di conseguenza $222 - x \mid 222^2$, ho un numero finito di tentativi!

Inoltre l'equazione mod p diventa

$$x^2 \equiv_p 0 \implies p \mid x^2 \rightarrow p \mid x \implies x = py \implies p^2 y^2 + p^2 y - 222p = 0$$

dividendo per p si ha

$$py^2 + py = 222, \quad p \mid py^2 + py \implies p \mid 222 = 2 \cdot 3 \cdot 37$$

provo tutti i casi...

Soluzioni Problemi

SOLUZIONE Problema 3: per quali primi p l'equazione

$x^2 + px - 222p = 0$ ha soluzioni intere?

$$\begin{aligned} p &= \frac{x^2}{222 - x} = \frac{x^2 - 222^2 + 222^2}{222 - x} = \frac{(x - 222)(x + 222) + 222^2}{222 - x} = \\ &= -x - 222 + \frac{222^2}{222 - x} \end{aligned}$$

Di conseguenza $222 - x \mid 222^2$, ho un numero finito di tentativi!

Inoltre l'equazione mod p diventa

$$x^2 \equiv_p 0 \implies p \mid x^2 \rightarrow p \mid x \implies x = py \implies p^2 y^2 + p^2 y - 222p = 0$$

dividendo per p si ha

$$py^2 + py = 222, \quad p \mid py^2 + py \implies p \mid 222 = 2 \cdot 3 \cdot 37$$

provo tutti i casi...

Soluzioni Problemi

SOLUZIONE Problema 3: per quali primi p l'equazione

$x^2 + px - 222p = 0$ ha soluzioni intere?

$$\begin{aligned} p &= \frac{x^2}{222 - x} = \frac{x^2 - 222^2 + 222^2}{222 - x} = \frac{(x - 222)(x + 222) + 222^2}{222 - x} = \\ &= -x - 222 + \frac{222^2}{222 - x} \end{aligned}$$

Di conseguenza $222 - x \mid 222^2$, ho un numero finito di tentativi!

Inoltre l'equazione mod p diventa

$$x^2 \equiv_p 0 \implies p \mid x^2 \rightarrow p \mid x \implies x = py \implies p^2 y^2 + p^2 y - 222p = 0$$

dividendo per p si ha

$$py^2 + py = 222, \quad p \mid py^2 + py \implies p \mid 222 = 2 \cdot 3 \cdot 37$$

provo tutti i casi...

Soluzioni Problemi

SOLUZIONE Problema 3: per quali primi p l'equazione

$x^2 + px - 222p = 0$ ha soluzioni intere?

$$\begin{aligned} p &= \frac{x^2}{222 - x} = \frac{x^2 - 222^2 + 222^2}{222 - x} = \frac{(x - 222)(x + 222) + 222^2}{222 - x} = \\ &= -x - 222 + \frac{222^2}{222 - x} \end{aligned}$$

Di conseguenza $222 - x \mid 222^2$, ho un numero finito di tentativi!

Inoltre l'equazione mod p diventa

$$x^2 \equiv_p 0 \implies p \mid x^2 \rightarrow p \mid x \implies x = py \implies p^2 y^2 + p^2 y - 222p = 0$$

dividendo per p si ha

$$py^2 + py = 222, \quad p \mid py^2 + py \implies p \mid 222 = 2 \cdot 3 \cdot 37$$

provo tutti i casi...

Soluzioni Problemi

SOLUZIONE Problema 3: per quali primi p l'equazione

$x^2 + px - 222p = 0$ ha soluzioni intere?

$$\begin{aligned} p &= \frac{x^2}{222 - x} = \frac{x^2 - 222^2 + 222^2}{222 - x} = \frac{(x - 222)(x + 222) + 222^2}{222 - x} = \\ &= -x - 222 + \frac{222^2}{222 - x} \end{aligned}$$

Di conseguenza $222 - x \mid 222^2$, ho un numero finito di tentativi!

Inoltre l'equazione mod p diventa

$$x^2 \equiv_p 0 \implies p \mid x^2 \rightarrow p \mid x \implies x = py \implies p^2 y^2 + p^2 y - 222p = 0$$

dividendo per p si ha

$$py^2 + py = 222, \quad p \mid py^2 + py \implies p \mid 222 = 2 \cdot 3 \cdot 37$$

provo tutti i casi...

Soluzioni Problemi

SOLUZIONE Problema 4: trovare $x, y, z, w \in \mathbb{N}$ tali che $2^x + 3^y + 5^z = 7^w$

Se supponiamo $x \neq 0$ l'equazione mod 2 diventa $0 + 1 + 1 = 1$ impossibile.
Segue $x = 0$ e quindi $1 + 3^y + 5^z = 7^w$

Analogamente se fosse $y \neq 0$ la congruenza mod 3 darebbe
 $1 + 0 + (-1)^z = 1$ impossibile. Segue $y = 0$.

L'equazione $2 + 5^z = 7^w$ ha soluzione $z = w = 1$. Vogliamo dimostrare che tale soluzione risulta l'unica.

Se $z \geq 2$ possiamo scrivere $2 + 5^2 \cdot 5^{z-2} = 7^w$

l'equazione mod 25 risulta $2 = 7^w$ ma le potenze di 7 mod 25 sono
 $7^0 = 1, 7, 49 \equiv -1, 7^3 \equiv -7, 7^4 \equiv 1, \dots$

Nessuna potenza di 7 è congrua a 2 mod 25, l'equazione mod 25 se $z \geq 2$ risulta impossibile. $x = 0, y = 0, z = 1, w = 1$ è l'unica soluzione.

Soluzioni Problemi

SOLUZIONE Problema 4: trovare $x, y, z, w \in \mathbb{N}$ tali che $2^x + 3^y + 5^z = 7^w$

Se supponiamo $x \neq 0$ l'equazione mod 2 diventa $0 + 1 + 1 = 1$ impossibile.
Segue $x = 0$ e quindi $1 + 3^y + 5^z = 7^w$

Analogamente se fosse $y \neq 0$ la congruenza mod 3 darebbe
 $1 + 0 + (-1)^z = 1$ impossibile. Segue $y = 0$.

L'equazione $2 + 5^z = 7^w$ ha soluzione $z = w = 1$. Vogliamo dimostrare che tale soluzione risulta l'unica.

Se $z \geq 2$ possiamo scrivere $2 + 5^2 \cdot 5^{z-2} = 7^w$

l'equazione mod 25 risulta $2 = 7^w$ ma le potenze di 7 mod 25 sono
 $7^0 = 1, 7, 49 \equiv -1, 7^3 \equiv -7, 7^4 \equiv 1, \dots$

Nessuna potenza di 7 è congrua a 2 mod 25, l'equazione mod 25 se $z \geq 2$ risulta impossibile. $x = 0, y = 0, z = 1, w = 1$ è l'unica soluzione.

Soluzioni Problemi

SOLUZIONE Problema 4: trovare $x, y, z, w \in \mathbb{N}$ tali che $2^x + 3^y + 5^z = 7^w$

Se supponiamo $x \neq 0$ l'equazione mod 2 diventa $0 + 1 + 1 = 1$ impossibile. Segue $x = 0$ e quindi $1 + 3^y + 5^z = 7^w$

Analogamente se fosse $y \neq 0$ la congruenza mod 3 darebbe $1 + 0 + (-1)^z = 1$ impossibile. Segue $y = 0$.

L'equazione $2 + 5^z = 7^w$ ha soluzione $z = w = 1$. Vogliamo dimostrare che tale soluzione risulta l'unica.

Se $z \geq 2$ possiamo scrivere $2 + 5^2 \cdot 5^{z-2} = 7^w$

l'equazione mod 25 risulta $2 = 7^w$ ma le potenze di 7 mod 25 sono $7^0 = 1, 7, 49 \equiv -1, 7^3 \equiv -7, 7^4 \equiv 1, \dots$

Nessuna potenza di 7 è congrua a 2 mod 25, l'equazione mod 25 se $z \geq 2$ risulta impossibile. $x = 0, y = 0, z = 1, w = 1$ è l'unica soluzione.

Soluzioni Problemi

SOLUZIONE Problema 4: trovare $x, y, z, w \in \mathbb{N}$ tali che $2^x + 3^y + 5^z = 7^w$

Se supponiamo $x \neq 0$ l'equazione mod 2 diventa $0 + 1 + 1 = 1$ impossibile. Segue $x = 0$ e quindi $1 + 3^y + 5^z = 7^w$

Analogamente se fosse $y \neq 0$ la congruenza mod 3 darebbe $1 + 0 + (-1)^z = 1$ impossibile. Segue $y = 0$.

L'equazione $2 + 5^z = 7^w$ ha soluzione $z = w = 1$. Vogliamo dimostrare che tale soluzione risulta l'unica.

Se $z \geq 2$ possiamo scrivere $2 + 5^2 \cdot 5^{z-2} = 7^w$

l'equazione mod 25 risulta $2 = 7^w$ ma le potenze di 7 mod 25 sono $7^0 = 1, 7, 49 \equiv -1, 7^3 \equiv -7, 7^4 \equiv 1, \dots$

Nessuna potenza di 7 è congrua a 2 mod 25, l'equazione mod 25 se $z \geq 2$ risulta impossibile. $x = 0, y = 0, z = 1, w = 1$ è l'unica soluzione.

Soluzioni Problemi

SOLUZIONE Problema 4: trovare $x, y, z, w \in \mathbb{N}$ tali che $2^x + 3^y + 5^z = 7^w$

Se supponiamo $x \neq 0$ l'equazione mod 2 diventa $0 + 1 + 1 = 1$ impossibile.
Segue $x = 0$ e quindi $1 + 3^y + 5^z = 7^w$

Analogamente se fosse $y \neq 0$ la congruenza mod 3 darebbe
 $1 + 0 + (-1)^z = 1$ impossibile. Segue $y = 0$.

L'equazione $2 + 5^z = 7^w$ ha soluzione $z = w = 1$. Vogliamo dimostrare che tale soluzione risulta l'unica.

Se $z \geq 2$ possiamo scrivere $2 + 5^2 \cdot 5^{z-2} = 7^w$

l'equazione mod 25 risulta $2 = 7^w$ ma le potenze di 7 mod 25 sono
 $7^0 = 1, 7^1 = 7, 7^2 = 49 \equiv -1, 7^3 \equiv -7, 7^4 \equiv 1, \dots$

Nessuna potenza di 7 è congrua a 2 mod 25, l'equazione mod 25 se $z \geq 2$ risulta impossibile. $x = 0, y = 0, z = 1, w = 1$ è l'unica soluzione.

Soluzioni Problemi

SOLUZIONE Problema 4: trovare $x, y, z, w \in \mathbb{N}$ tali che $2^x + 3^y + 5^z = 7^w$

Se supponiamo $x \neq 0$ l'equazione mod 2 diventa $0 + 1 + 1 = 1$ impossibile. Segue $x = 0$ e quindi $1 + 3^y + 5^z = 7^w$

Analogamente se fosse $y \neq 0$ la congruenza mod 3 darebbe $1 + 0 + (-1)^z = 1$ impossibile. Segue $y = 0$.

L'equazione $2 + 5^z = 7^w$ ha soluzione $z = w = 1$. Vogliamo dimostrare che tale soluzione risulta l'unica.

Se $z \geq 2$ possiamo scrivere $2 + 5^2 \cdot 5^{z-2} = 7^w$

l'equazione mod 25 risulta $2 = 7^w$ ma le potenze di 7 mod 25 sono $7^0 = 1, 7, 49 \equiv -1, 7^3 \equiv -7, 7^4 \equiv 1, \dots$

Nessuna potenza di 7 è congrua a 2 mod 25, l'equazione mod 25 se $z \geq 2$ risulta impossibile. $x = 0, y = 0, z = 1, w = 1$ è l'unica soluzione.

Terne Pitagoriche

Terne pitagoriche

Cerchiamo le soluzioni intere (x, y, z) dell'equazione

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Se (x, y, z) è soluzione allora anche (kx, ky, kz) è soluzione $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Si dicono *primitive* le soluzioni (x, y, z) tali che

$$\text{MCD}(x, y) = \text{MCD}(x, z) = \text{MCD}(y, z) = \text{MCD}(x, y, z) = 1$$

Terne Pitagoriche

Terne pitagoriche

Cerchiamo le soluzioni intere (x, y, z) dell'equazione

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Se (x, y, z) è soluzione allora anche (kx, ky, kz) è soluzione $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Si dicono *primitive* le soluzioni (x, y, z) tali che

$$\text{MCD}(x, y) = \text{MCD}(x, z) = \text{MCD}(y, z) = \text{MCD}(x, y, z) = 1$$

TEOREMA

Ogni soluzione primitiva (x, y, z) dell'equazione

$$x^2 + y^2 = z^2$$

con y pari è della forma

$$\begin{cases} x = m^2 - n^2 \\ y = 2mn \\ z = m^2 + n^2 \end{cases}$$

con $m, n \in \mathbb{Z}$ $m > n$, $m + n$ *dispari* $MCD(m, n) = 1$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA

Osservazione: almeno uno tra x e y deve essere pari. Se fossero entrambi dispari $z^2 = x^2 + y^2 \equiv_4 2 \implies 2|z^2 \implies 4|z^2 \implies z^2 \equiv_4 0$, assurdo.

Sia $y = 2a \implies x^2 + y^2 = x^2 + 4a^2 = z^2 \implies z^2 - x^2 = 4a^2 \implies (z+x)(z-x) = 4a^2$

$$\begin{cases} z+x = b' \\ z-x = c' \end{cases} \quad \begin{cases} z = \frac{b'+c'}{2} \\ x = \frac{b'-c'}{2} \end{cases}$$

Necessariamente b', c' devono essere entrambi pari, quindi

$$b' = z+x = 2b \quad c' = z-x = 2c$$

Terne Pitagoriche

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA

RICORDO: se $a = b \cdot q + r$ allora $MCD(a, b) = MCD(b, r)$

Si ha $d = MCD(b, c) = MCD(\frac{x+z}{2}, \frac{z-x}{2}) = MCD(z, \frac{z-x}{2}) = MCD(x, \frac{z-x}{2})$

Segue $d|z$ e $d|x$ ma $MCD(x, z) = 1$ di conseguenza $MCD(b, c) = 1$.

$$4a^2 = y^2 = z^2 - x^2 = 4\left(\frac{x+z}{2}\right)\left(\frac{z-x}{2}\right) = 4bc$$

$$a^2 = bc \quad MCD(b, c) = 1 \quad \implies \quad b = m^2, \quad c = n^2$$

$$z = \frac{z+x}{2} + \frac{z-x}{2} = b + c = m^2 + n^2$$

$$x = \frac{z+x}{2} - \frac{z-x}{2} = b - c = m^2 - n^2$$

$$y^2 = 4bc = 4m^2n^2 \quad y = 2mn$$

Terne Pitagoriche

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA

RICORDO: se $a = b \cdot q + r$ allora $MCD(a, b) = MCD(b, r)$

Si ha $d = MCD(b, c) = MCD(\frac{x+z}{2}, \frac{z-x}{2}) = MCD(z, \frac{z-x}{2}) = MCD(x, \frac{z-x}{2})$

Segue $d|z$ e $d|x$ ma $MCD(x, z) = 1$ di conseguenza $MCD(b, c) = 1$.

$$4a^2 = y^2 = z^2 - x^2 = 4\left(\frac{x+z}{2}\right)\left(\frac{z-x}{2}\right) = 4bc$$

$$a^2 = bc \quad MCD(b, c) = 1 \quad \implies \quad b = m^2, \quad c = n^2$$

$$z = \frac{z+x}{2} + \frac{z-x}{2} = b + c = m^2 + n^2$$

$$x = \frac{z+x}{2} - \frac{z-x}{2} = b - c = m^2 - n^2$$

$$y^2 = 4bc = 4m^2n^2 \quad y = 2mn$$

Terne Pitagoriche

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA

RICORDO: se $a = b \cdot q + r$ allora $MCD(a, b) = MCD(b, r)$

Si ha $d = MCD(b, c) = MCD(\frac{x+z}{2}, \frac{z-x}{2}) = MCD(z, \frac{z-x}{2}) = MCD(x, \frac{z-x}{2})$

Segue $d|z$ e $d|x$ ma $MCD(x, z) = 1$ di conseguenza $MCD(b, c) = 1$.

$$4a^2 = y^2 = z^2 - x^2 = 4(\frac{x+z}{2})(\frac{z-x}{2}) = 4bc$$

$$a^2 = bc \quad MCD(b, c) = 1 \quad \implies b = m^2, \quad c = n^2$$

$$z = \frac{z+x}{2} + \frac{z-x}{2} = b + c = m^2 + n^2$$

$$x = \frac{z+x}{2} - \frac{z-x}{2} = b - c = m^2 - n^2$$

$$y^2 = 4bc = 4m^2n^2 \quad y = 2mn$$

Equazione di Pell

EQUAZIONE DI PELL

Equazione Diofantea quadratica del tipo

$$x^2 - dy^2 = c, \quad d \in \mathbb{N} \quad \text{NON} \quad \text{quadrato}$$

ammette sempre soluzioni se $c = 1$

Equazione di Pell

Soluzioni dell'EQUAZIONE DI PELL $x^2 - dy^2 = 1$

Metodo:

- calcolare una soluzione non banale (diversa da $(1, 0)$) che chiameremo (x_0, y_0)
- $(x_0 - \sqrt{d}y_0)(x_0 + \sqrt{d}y_0) = 1 = 1^n =$
 $(x_0 - \sqrt{d}y_0)^n(x_0 + \sqrt{d}y_0)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} - 0$
- sviluppare i calcoli di $(x_0 - \sqrt{d}y_0)^n = x_n - \sqrt{d}y_n$
- anche (x_n, y_n) è soluzione!

Equazione di Pell

ESEMPI di EQUAZIONI DI PELL

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

- $(x_0, y_0) = (3, 2)$
- $(3 - \sqrt{2} \cdot 2)(3 + \sqrt{2} \cdot 2) = 1$
- $(3 - \sqrt{2} \cdot 2)^2 = 9 + 8 - 4 \cdot 3\sqrt{2},$
 $(3 - \sqrt{2} \cdot 2)^3 = (17 - 12\sqrt{2})(3 - \sqrt{2} \cdot 2) = 99 - 70\sqrt{2}, \quad \dots$
- anche $(x_2, y_2) = (17, 12), (x_3, y_3) = (99, 70), \quad \dots$ sono soluzioni!

Equazione di Pell

ESEMPI di EQUAZIONI DI PELL

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

- $(x_0, y_0) = (3, 2)$
- $(3 - \sqrt{2} \cdot 2)(3 + \sqrt{2} \cdot 2) = 1$
- $(3 - \sqrt{2} \cdot 2)^2 = 9 + 8 - 4 \cdot 3\sqrt{2},$
 $(3 - \sqrt{2} \cdot 2)^3 = (17 - 12\sqrt{2})(3 - \sqrt{2} \cdot 2) = 99 - 70\sqrt{2}, \quad \dots$
- anche $(x_2, y_2) = (17, 12), (x_3, y_3) = (99, 70), \quad \dots$ sono soluzioni!

Equazione di Pell

ESEMPI di EQUAZIONI DI PELL

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

- $(x_0, y_0) = (3, 2)$
- $(3 - \sqrt{2} \cdot 2)(3 + \sqrt{2} \cdot 2) = 1$
- $(3 - \sqrt{2} \cdot 2)^2 = 9 + 8 - 4 \cdot 3\sqrt{2},$
 $(3 - \sqrt{2} \cdot 2)^3 = (17 - 12\sqrt{2})(3 - \sqrt{2} \cdot 2) = 99 - 70\sqrt{2}, \quad \dots$
- anche $(x_2, y_2) = (17, 12), (x_3, y_3) = (99, 70), \quad \dots$ sono soluzioni!

ESEMPI di EQUAZIONI DI PELL

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

- $(x_0, y_0) = (3, 2)$
- $(3 - \sqrt{2} \cdot 2)(3 + \sqrt{2} \cdot 2) = 1$
- $(3 - \sqrt{2} \cdot 2)^2 = 9 + 8 - 4 \cdot 3\sqrt{2},$
 $(3 - \sqrt{2} \cdot 2)^3 = (17 - 12\sqrt{2})(3 - \sqrt{2} \cdot 2) = 99 - 70\sqrt{2}, \quad \dots$
- anche $(x_2, y_2) = (17, 12), (x_3, y_3) = (99, 70), \quad \dots$ sono soluzioni!

ESEMPI di EQUAZIONI DI PELL

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

- $(x_0, y_0) = (3, 2)$
- $(3 - \sqrt{2} \cdot 2)(3 + \sqrt{2} \cdot 2) = 1$
- $(3 - \sqrt{2} \cdot 2)^2 = 9 + 8 - 4 \cdot 3\sqrt{2},$
 $(3 - \sqrt{2} \cdot 2)^3 = (17 - 12\sqrt{2})(3 - \sqrt{2} \cdot 2) = 99 - 70\sqrt{2}, \quad \dots$
- anche $(x_2, y_2) = (17, 12), (x_3, y_3) = (99, 70), \quad \dots$ sono soluzioni!

ESEMPI di EQUAZIONI DI PELL

$$x^2 - 5y^2 = 1$$

- $(x_0, y_0) = (9, 4)$
- $(9 - \sqrt{5} \cdot 4)(9 + \sqrt{5} \cdot 4) = 1$
- $(9 - \sqrt{5} \cdot 4)^2 = 81 + 80 - 72\sqrt{5}, (3 - \sqrt{2} \cdot 2)^3 = \dots$
- anche $(x_2, y_2) = (161, 72), (x_3, y_3) = (\dots, \dots), \dots$ sono soluzioni!

ESEMPI di EQUAZIONI DI PELL

$$x^2 - 5y^2 = 1$$

- $(x_0, y_0) = (9, 4)$
- $(9 - \sqrt{5} \cdot 4)(9 + \sqrt{5} \cdot 4) = 1$
- $(9 - \sqrt{5} \cdot 4)^2 = 81 + 80 - 72\sqrt{5}, (3 - \sqrt{2} \cdot 2)^3 = \dots$
- anche $(x_2, y_2) = (161, 72), (x_3, y_3) = (\dots, \dots), \dots$ sono soluzioni!

Equazione di Pell

ESEMPI di EQUAZIONI DI PELL

$$x^2 - 5y^2 = 1$$

- $(x_0, y_0) = (9, 4)$
- $(9 - \sqrt{5} \cdot 4)(9 + \sqrt{5} \cdot 4) = 1$
- $(9 - \sqrt{5} \cdot 4)^2 = 81 + 80 - 72\sqrt{5}, (3 - \sqrt{2} \cdot 2)^3 = \dots$
- anche $(x_2, y_2) = (161, 72), (x_3, y_3) = (\dots, \dots), \dots$ sono soluzioni!

Equazione di Pell

ESEMPI di EQUAZIONI DI PELL

$$x^2 - 5y^2 = 1$$

- $(x_0, y_0) = (9, 4)$
- $(9 - \sqrt{5} \cdot 4)(9 + \sqrt{5} \cdot 4) = 1$
- $(9 - \sqrt{5} \cdot 4)^2 = 81 + 80 - 72\sqrt{5}, (3 - \sqrt{2} \cdot 2)^3 = \dots$
- anche $(x_2, y_2) = (161, 72), (x_3, y_3) = (\dots, \dots), \dots$ sono soluzioni!

ESEMPI di EQUAZIONI DI PELL

$$x^2 - 5y^2 = 1$$

- $(x_0, y_0) = (9, 4)$
- $(9 - \sqrt{5} \cdot 4)(9 + \sqrt{5} \cdot 4) = 1$
- $(9 - \sqrt{5} \cdot 4)^2 = 81 + 80 - 72\sqrt{5}, (3 - \sqrt{2} \cdot 2)^3 = \dots$
- anche $(x_2, y_2) = (161, 72), (x_3, y_3) = (\dots, \dots), \dots$ sono soluzioni!

Grazie per l'attenzione!

Qualche ulteriore piccola sfida...

- **Problema:** Risolvere l'equazione $3^a + 2^b + 2015 = 3c!$ con a, b, c interi non negativi.
- **Problema:** Determinare tutti gli interi positivi n tali che $(n + 15)(n + 2020)$ sia un quadrato perfetto.
- **Problema:** Trovare tutti i numeri dispari minori di 2020 tali che la somma di tutti i loro divisori positivi sia dispari.

Grazie per l'attenzione!

Qualche ulteriore piccola sfida...

- **Problema:** Risolvere l'equazione $3^a + 2^b + 2015 = 3c!$ con a, b, c interi non negativi.
- **Problema:** Determinare tutti gli interi positivi n tali che $(n + 15)(n + 2020)$ sia un quadrato perfetto.
- **Problema:** Trovare tutti i numeri dispari minori di 2020 tali che la somma di tutti i loro divisori positivi sia dispari.