LE FORME VALIDE DI RAGIONAMENTO NELLE DIMOSTRAZIONI MATEMATICHE

STAGE DI MATEMATICA

23 GENNAIO 2026 – ORIETTA ZANGIACOMI – ORIETTAZANGIACOMI@GMAIL.COM

PREREQUISITI

1. Avere già «dimostrato» in geometria o in algebra, ad esempio il Teorema del Resto (non indispensabile)
2. nozioni di geometria sintetica del biennio (fino alle similitudini)
3. nozioni di logica (predicato, operatori logici $\wedge, \vee, \neg, \exists, \nexists, \exists!, \forall, \rightarrow, \leftarrow, \leftrightarrow$) (non indispensabile)
4. Condizioni necessarie e sufficienti (non indispensabile)
5. Congruenze e loro proprietà (per comprendere la dimostrazione di due problemi, pazienza se non c'è il prerequisito, vi spiegherò il minimo indispensabile)

I prerequisiti «non indispensabili» sono tali perché in ogni caso li spiegheremo (velocemente), ma essendo corposi e tanti averne già almeno una «spolverata» non sarebbe male

CREDITI

Ho tratto idee e spunti:
- dal vostro libro di testo «4B Manuale blu 2.0 di matematica» Ebook multimediale - CAPITOLO C10, Confezione 4, di Bergamini, Barozzi, Trifone, ed. Zanichelli
- dal vostro libro di testo «Geometria blu - seconda edizione» - CAPITOLO G2, di Bergamini, Barozzi, Trifone, ed. Zanichelli
- dal sito delle Olimpiadi della Matematica https://olimpiadi.dm.unibo.it, in particolare dall'archivio dei testi assegnati nelle «gare di Febbraio» per la ricerca di esercizi da proporvi

CREDITI

- dalle registrazioni degli stage Senior olimpici della Scuola Normale Superiore dal sito «Pillole di Senior» https://www.olimat-treviso.it/newsite/index.php/materiali/i-materiali-di-preparazione-al-senior
- da WIKIPEDIA
- da «Principio dei cassetti e principio di inclusione - esclusione: piccioni in gabbia e problemi matematici (gare di matematica parte 3)» articolo di Lorenzo Mazza da https://www.mathisintheair.org/wp/2021/03/principio-dei-cassetti-e-principio-di-inclusione-esclusione-piccioni-in-gabbia-e-problemi-matematici-gare-di-matematica-parte-3/
- da «Treccani on line» https://www.treccani.it/enciclopedia/

DI COSA CI OCCUPEREMO - OBIETTIVI

L'OBIETTIVO PRINCIPALE E' FARVI COMPRENDERE *COME SI STRUTTURA UNA BUONA DIMOSTRAZIONE* E DI MOSTRARVI, ANCHE ATTRAVERSO UNA SERIE DI ESEMPI, LE PRINCIPALI FORME DI DIMOSTRAZIONE VALIDE:

- Dimostrazioni dirette di implicazioni (se … allora …)
- Dimostrazioni dirette di coimplicazioni (… se e solo se …)
- Dimostrazioni per assurdo
- Dimostrazioni per induzione (anche estesa o con discesa infinita)
- Combinazioni di multiple metodologie dimostrative
- Dimostrazioni che sfruttano il principio dei cassetti o il complementary counting

Infine faremo un rapido excursus sugli schemi di ragionamento validi utilizzati per le varie tipologie di dimostrazioni viste

PERCHE’ QUESTI ARGOMENTI

- Per imparare a dimostrare in modo corretto ed efficace
- Per capire cosa significa SE E SOLO SE e l’importanza della dimostrazione inversa
- Per mostrarvi alcune tecniche poco usate nella pratica scolastica quotidiana ma che sono molto utili (induzioni, cassetti, discese infinite)
- Per mettere quelli di voi che faranno la gara individuale di febbraio nelle condizioni di non omettere parti fondamentali delle dimostrazioni
- Per fare sano e buon esercizio di RAGIONAMENTO
- Perché magari imparate qualche trucchetto utile per risolvere alcuni esercizi delle gare a squadre

OSSERVAZIONE

QUESTO SIMBOLO SARA’ AFFIANCATO ALLE DEFINIZIONI / FORMULE / TEOREMI CHE VI POTRANNO SERVIRE IN FUTURO SIA NELLE GARE INDIVIDUALI CHE IN QUELLE A SQUADRE

SE … ALLORA …

SE … ALLORA … 1

CONSIDERIAMO LA PROPOSIZIONE:

«SE ABITO A TREVISO ALLORA ABITO IN ITALIA»

IN QUALI ALTRE MANIERE LA POTREI ESPRIMERE? TANTISSIME E TUTTE EQUIVALENTI. PROVIAMO:

1. ABITARE A TREVISO E' SUFFICIENTE (MA NON NECESSARIO) PER ABITARE IN ITALIA
2. ABITARE A TREVISO E' UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE (MA NON NECESSARIA) PER ABITARE IN ITALIA
3. E' SUFFICIENTE (MA NON NECESSARIO) ABITARE A TREVISO PER ABITARE IN ITALIA
4. SE ABITO A TREVISO ALLORA NECESSARIAMENTE ABITO IN ITALIA
5. PER ABITARE A TREVISO E' NECESSARIO (MA NON SUFFICIENTE) ABITARE IN ITALIA
6. ABITO IN ITALIA SE ABITO A TREVISO ⟵ (attenzione in questa formulazione alla posposizione del SE)
7. ABITO A TREVISO SOLO SE ABITO IN ITALIA ⟵ (è necessario abitare in Italia per abitare a Treviso)
8. SOLO SE ABITO IN ITALIA, ABITO A TREVISO ⟵ (posposizione della precedente)
9. ABITARE A TREVISO IMPLICA ABITARE IN ITALIA
10. ABITARE A TREVISO IMPLICA NECESSARIAMENTE ABITARE IN ITALIA
11. ABITARE IN ITALIA NON IMPLICA NECESSARIAMENTE ABITARE A TREVISO
12. … e in tanti altri modi possibili

SE … ALLORA … 2

SE ABITO A TREVISO ALLORA ABITO IN ITALIA

p
ipotesi (o **premessa**)

t
tesi (o **conseguenza**)

p è condizione sufficiente per t

t è condizione necessaria per p

se p è vera allora anche t è vera

se t è vera nulla posso dire di p, potrebbe essere vera ma anche falsa

in simboli si scrive $p \Longrightarrow t$ e si legge p **implica** t

Il simbolo $\Longrightarrow$ si chiama simbolo di implicazione (logica)

SE … ALLORA … 3

CONSIDERIAMO LE FORME:

1. ABITARE A TREVISO E' SUFFICIENTE (MA NON NECESSARIO) PER ABITARE IN ITALIA
2. ABITARE A TREVISO E' UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE (MA NON NECESSARIA) PER ABITARE IN ITALIA
3. E' SUFFICIENTE (MA NON NECESSARIO) ABITARE A TREVISO PER ABITARE IN ITALIA
4. SE ABITO A TREVISO ALLORA NECESSARIAMENTE ABITO IN ITALIA
5. PER ABITARE A TREVISO E' NECESSARIO (MA NON SUFFICIENTE) ABITARE IN ITALIA
6. ABITO IN ITALIA SE ABITO A TREVISO ⟵ (attenzione in questa formulazione alla posposizione del SE)
7. ABITO A TREVISO SOLO SE ABITO IN ITALIA ⟵ (è necessario abitare in Italia per abitare a Treviso)
8. SOLO SE ABITO IN ITALIA, POSSO ABITARE A TREVISO ⟵ (posposizione della precedente)

Da esse si evidenzia che:

ABITARE A TREVISO è, nell'implicazione, la **CONDIZIONE SUFFICIENTE**

ABITARE IN ITALIA è, nell'implicazione, la **CONDIZIONE NECESSARIA**

La condizione sufficiente è preceduta da SE; la condizione sufficiente implica la verità di quella necessaria

La condizione necessaria è preceduta da SOLO SE; la condizione necessaria non implica la verità della sufficiente

La condizione sufficiente rende vera la condizione necessaria

La condizione necessaria non è detto che renda vera la condizione sufficiente

SE … ALLORA … 4

$p \Longrightarrow t$ ovvero *p* implica *t*

$t \Longleftarrow p$ ovvero *t è implicata da p*

MA NON E' EQUIVALENTE A DIRE CHE $t \Longrightarrow p$

In generale un'implicazione non è invertibile, infatti:
SE ABITO IN ITALIA ALLORA ABITO A TREVISO
in generale **non** è vera

SE … ALLORA … : definizioni, assiomi e teoremi 5

- Le definizioni sono frasi con le quali si dà il nome a un ente, cioè un «oggetto» della teoria, e se ne precisa il significato facendo riferimento ad altri oggetti già definiti o a enti primitivi, ossia oggetti che non vengono definiti, ma vengono accettati come noti.

- Le proposizioni che esprimono relazioni tra gli enti e che sono poste a fondamento della teoria vengono dette assiomi o postulati.

- Dagli assiomi, mediante procedimenti detti dimostrazioni, è possibile ricavare altre proposizioni, dette teoremi, che esprimono proprietà e relazioni fra gli enti della teoria. Un teorema lega alcune proposizioni di partenza date, dette ipotesi, e una proposizione finale, detta tesi. <u>Le dimostrazioni preservano la verità</u>; il che vuol dire che, se le ipotesi di un teorema e gli assiomi sono veri, tale è anche la tesi che si ottiene da essi mediante dimostrazione.

ESEMPIO

NELLA GEOMETRIA RAZIONALE DEL PIANO:

- **ENTI PRIMITIVI**: PUNTO E RETTA
- **ASSIOMA**: «PER DUE PUNTI DISTINTI PASSA UNA E UNA SOLA RETTA»
- **TOREMA**: «UN TRIANGOLO AVENTE UNA COPPIA DI ANGOLI CONGRUENTI E' ISOSCELE»

SE … ALLORA … 6

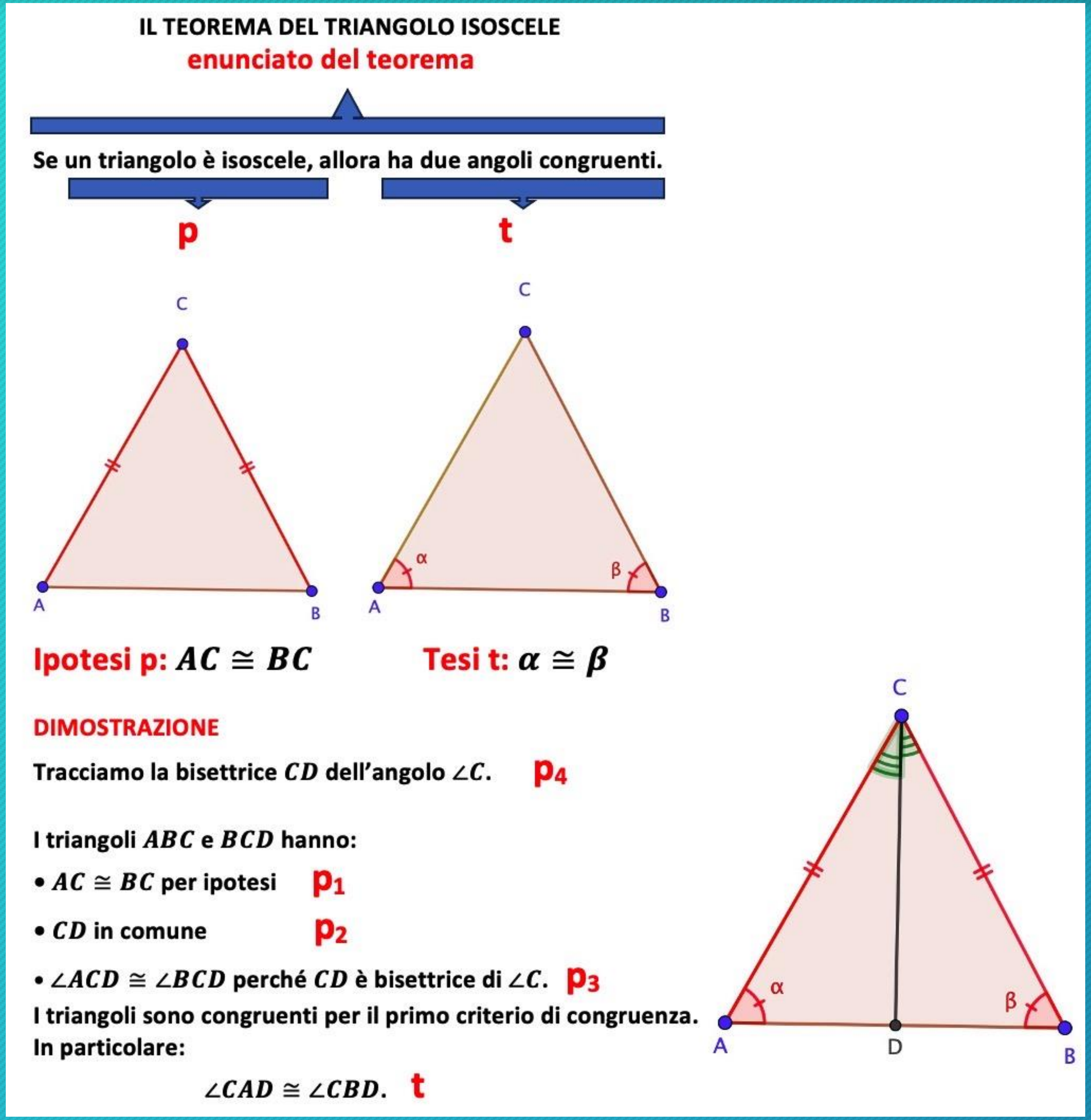
Una DIMOSTRAZIONE è una SEQUENZA di IMPLICAZIONI LOGICHE, dette anche DEDUZIONI.

Le deduzioni, ossia i singoli passi di una dimostrazione, sono IMPLICAZIONI LOGICHE.

In termini più precisi, possiamo dire che, in una teoria T, una dimostrazione della tesi t, che parte dalle ipotesi h_1 , h_2 , h_3 , …, è una sequenza finita e ordinata di IMPLICAZIONI di cui l'ultima ha come conseguenza la tesi t, e tale che ogni IMPLICAZIONE soddisfa una delle seguenti regole:

1. è un assioma di T (e dunque vero);
2. è una proprietà espressa in una definizione di T (e dunque vera)
3. è una proprietà di un ente di T costruito nel rispetto di una definizione
4. è un teorema già dimostrato in precedenza (e dunque vero)
5. è un'implicazione logica dedotta da una delle implicazioni precedenti mediante, a sua volta, dimostrazione logica.

SE … ALLORA … 7



Devo dimostrare il teorema $p \Longrightarrow t$

Uso la sequenza di implicazioni:

$p \Longrightarrow p_1$ (definizione di triangolo isoscele)

$p_4 \Longrightarrow p_3$ (definizione di bisettrice)

$p_4 \Longrightarrow p_2$ (costruzione della bisettrice, per cui p_2 è $vera$)

$$p_1 \;\; e \;\; p_2 \; e \;\; p_3 \Longrightarrow \; t$$
$$\left(\begin{array}{c} \text{è } un\ teorema\ già\ noto\ e\ dimostrato, \\ \text{è } il\ primo\ criterio\ di\ congruenza\ dei\ triangoli \end{array}\right)$$

Quindi la catena di implicazioni porta a concludere che t è vera

SE … ALLORA … 8

Non sempre nell'enunciato di un teorema ipotesi e tesi sono facilmente individuabili

Il teorema precedente potrebbe anche essere stato espresso come nei seguenti esempi:

1. «In un triangolo isoscele esistono due angoli congruenti.»

2. «Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono tra loro congruenti.»

3. «Gli angoli alla base sono congruenti se il triangolo è isoscele.»

4. «Essendo il triangolo isoscele esso ha due angoli congruenti.»

da **NON CONFONDERE** in ogni caso con il **teorema inverso**!!!

SE … ALLORA …

Cosa fare in questo caso?

RAGIONARE!!! Potete solamente RIFORMULARE l’enunciato in termini di:

«SE qualche cosa ALLORA qualche altra cosa»

evitando di cadere nella formulazione del
teorema INVERSO (in cui ipotesi e tesi sono scambiate)

Affronteremo il tema del teorema inverso quando ci occuperemo della forma:

«qualche cosa SE E SOLO SE qualche altra cosa»

SE … ALLORA …

SCAMBIARE IPOTESI E TESI E’ L’ERRORE PIU’ GRAVE CHE POTETE FARE!!!

0 PUNTI NELL’ESERCIZIO OLIMPICO

VOTO 4 NEL COMPITO DI MATEMATICA

Le dimostrazioni che usano l'implicazione logica $\Longrightarrow$ usano lo schema di ragionamento detto MODUS PONENS

SE … ALLORA … ESEMPIO a1

problema 2 play off 2024

Provare che $\nexists n \in \mathbb{N} \mid 324 + 455^n$ sia un numero primo.

ESERCIZIO DI TEORIA DEI NUMERI:

Provate a riformularlo in termini di

SE … ALLORA …

per capire ipotesi e tesi

SE … ALLORA …

ESEMPIO a2

Provare che $\nexists n \in \mathbb{N} \mid 324 + 455^n$ *sia un numero primo.*

Alternativa 1:

SE

$n \in \mathbb{N}$ **(ipotesi)**

ALLORA

$324 + 455^n$ **non è un numero primo** **(tesi)**

Alternativa 2:

SE

$n \in \mathbb{N}$ **(ipotesi)**

ALLORA

$324 + 455^n$ **ammette divisori diversi da 1 e da se stesso** **(tesi)**

SE … ALLORA … ESEMPIO a3

Consideriamo separatamente i casi:

- *primo caso: n pari di tipo* $n = 4k$, *per ogni* k *naturale*
- *secondo caso: n pari di tipo* $n = 4k + 2$, *per ogni* k *naturale*
- *terzo caso: n dispari ovvero* $n = 2k + 1$, *per ogni* k *naturale.*

Primo caso: n pari di tipo $n = 4k$, *per ogni* k *naturale*
Considero $324 + 455^n = 324 + 455^{4k}$. *Trasformiamo* $324 + 455^{4k}$ *come segue:*
$324 + 455^{4k} = 18^2 + (455^{2k})^2 = (455^{2k})^2 + 18^2 =$ *(aggiungendo ora e togliendo* $2 \cdot 455^{2k} \cdot 18$*)*

$$= (455^{2k})^2 + 18^2 + 2 \cdot 455^{2k} \cdot 18 - 2 \cdot 455^{2k} \cdot 18 =$$
$$[(455^{2k})^2 + 18^2 + 2 \cdot 455^{2k} \cdot 18] - 2 \cdot 455^{2k} \cdot 18 =$$
$$[455^{2k} + 18]^2 - 455^{2k} \cdot 36 =$$
$$[455^{2k} + 18]^2 - 455^{2k} \cdot 6^2 =$$
$$(455^{2k} + 18)^2 - (455^k \cdot 6)^2 =$$

che essendo differenza di due quadrati si può scomporre come:
$$= (455^{2k} + 18 - 455^k \cdot 6) \cdot (455^{2k} + 18 + 455^k \cdot 6)$$
e dunque in questo caso $324 + 455^n$, *essendo il prodotto di due fattori, non è primo.*

Secondo caso: n pari di tipo $n = 4k + 2$, *per ogni* k *naturale*
Considero $324 + 455^n = 324 + 455^{4k+2} = 324 + (455^2)^{2k+1}$.
Osservo che $324 \equiv 1 \quad (17)$
e che $455^2 \equiv 13^2 \equiv 169 \equiv 16 \equiv -1 \quad (17)$
e che, essendo $2k + 1$ *dispari,* $(455^2)^{2k+1} \equiv (-1)^{2k+1} \equiv -1 \quad (17)$
dunque $324 + 455^n = 324 + (455^2)^{2k+1} \equiv 1 - 1 \equiv 0 \quad (17)$.
Dunque $324 + 455^n$ *essendo divisibile per 17 non è primo.*

Terzo caso: n dispari ovvero $n = 2k + 1$, *per ogni* k *naturale*
Considero $324 + 455^n = 324 + 455^{2k+1} = 324 + (455^2)^k \cdot 455$.
Osservo che $324 \equiv 1 \ (19)$
e che $455^2 \equiv 18^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \quad (19)$
e che $455 \equiv 18 \equiv -1 \quad (19)$
dunque $324 + 455^n = 324 + (455^2)^k \cdot 455 \equiv 1 + (1)^k \cdot (-1) \equiv 1 - 1 \equiv 0 \quad (19)$.
Dunque $324 + 455^n$ *essendo divisibile per 19 non è primo.*

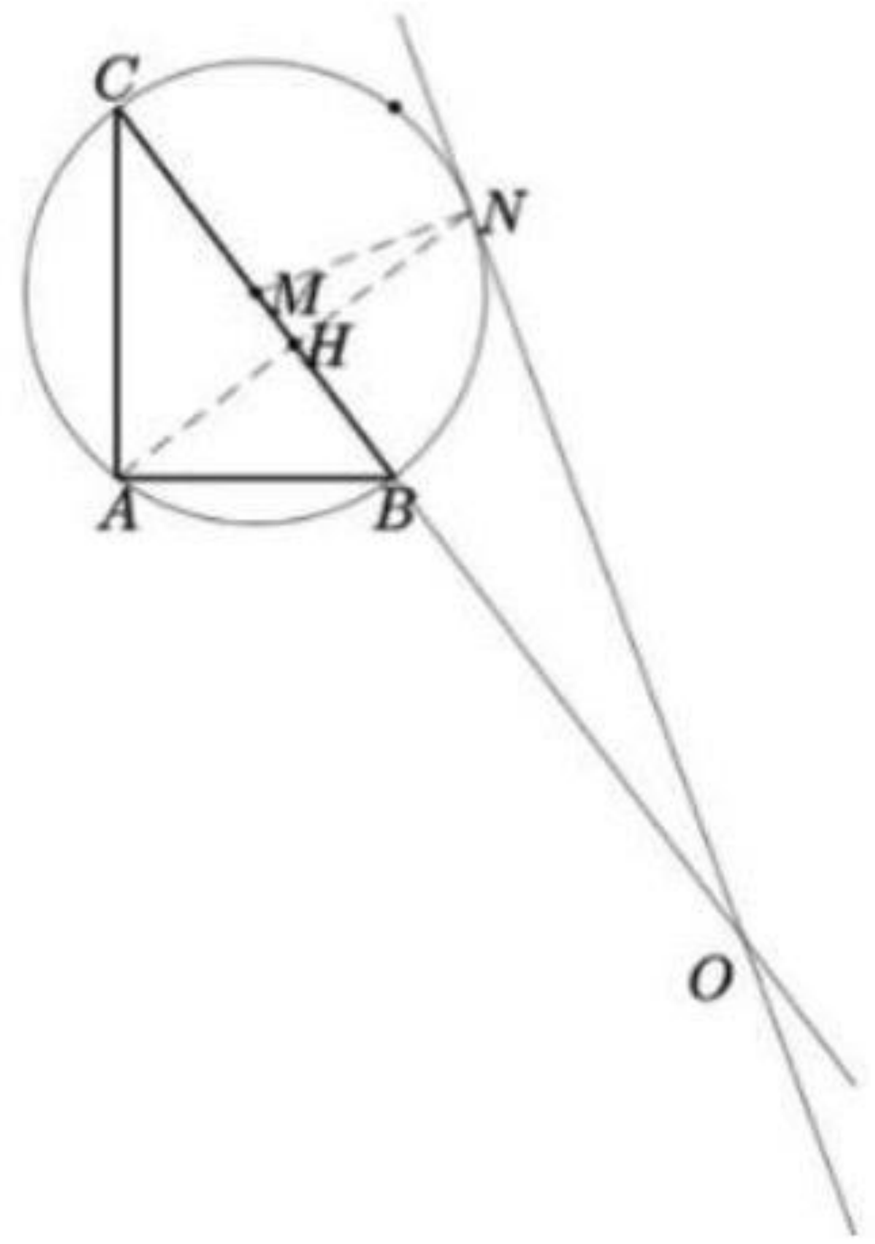
Quindi in nessun caso $324 + 455^n$ *è un numero primo.*

SE … ALLORA …

ESEMPIO B1

play off 2025 problema 1 prima parte

In un triangolo rettangolo ABC siano AB e AC i cateti, con $AC > AB$. Detto M il punto medio dell'ipotenusa, indichiamo con N il punto corrispondente di A nella simmetria assiale di asse BC. Si conduca la perpendicolare r a MN per N. Sia s la retta contenente l'ipotenusa. Sia $\{O\} = r \cap s$. Si dimostri che:



$$\angle OMN = 2 \cdot \angle ACB$$

ESERCIZIO DI GEOMETRIA (di cui veniva assegnata la figura)

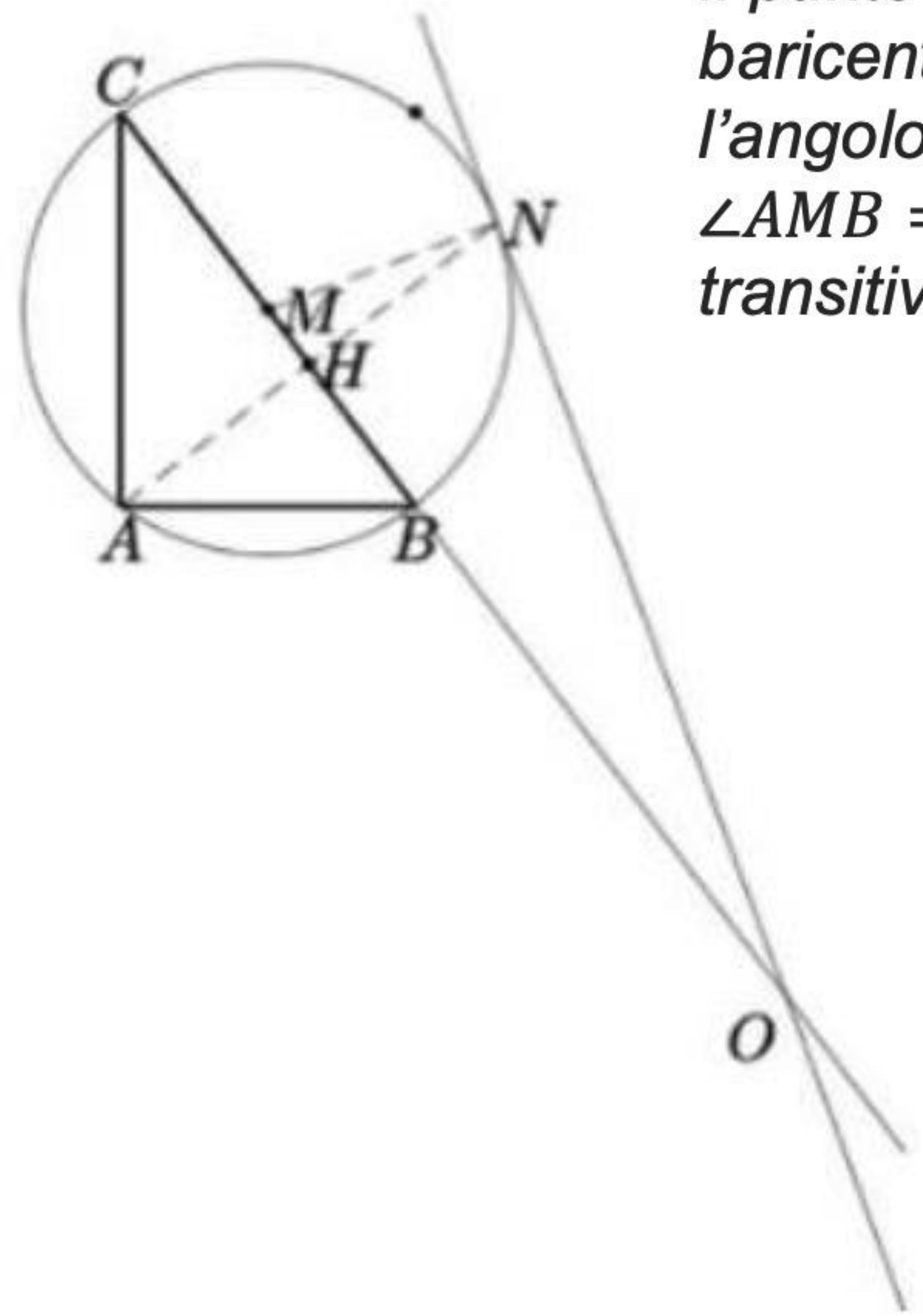
IPOTESI:

- ABC è triangolo rettangolo in A (dunque AB e AC cateti)
- AC è maggiore di AB
- CM è congruente a MB, M appartiene a CB
- N è il punto trasformato di A nella simmetria assiale di asse BC
- la retta r è perpendicolare a MN e passa per N
- s è la retta contenente l'ipotenusa BC
- le rette r ed s si intersecano nel punto O

TESI:

- L'angolo OMN è il doppio dell'angolo ACB

SE … ALLORA … ESEMPIO B2



Il punto medio M dell'ipotenusa BC è anche il circocentro del triangolo ABC, nonché baricentro della circonferenza circoscritta al triangolo ABC; l'angolo al centro $\angle AMB$ e l'angolo alla circonferenza $\angle ACB$ insistono sullo stesso arco, da cui $\angle AMB = 2\,\angle ACB$. Inoltre $\angle AMB = \angle OMN$, data la simmetria di A e di N rispetto a BC; se ne ricava, per proprietà transitiva, che $\angle OMN = 2\angle ACB$.

Quali teoremi/proprietà dovevate già conoscere?

- Proprietà del circocentro di un triangolo rettangolo
- Proprietà del triangolo rettangolo inscritto in una (semi)circonferenza
- Teorema dell'angolo al centro e di un corrispondente angolo alla circonferenza
- Proprietà degli oggetti trasformati in una simmetria (vedi l'importanza delle trasformazioni!)
- Proprietà transitiva

SE … ALLORA … ESEMPIO C1

problema 5 play off 2022

Dimostra che se $7 \nmid n$, *allora* $7 \mid n^{12} - 1$

ESERCIZIO DI TEORIA DEI NUMERI

È già formulato in termini di SE … ALLORA …

SE … ALLORA …

ESEMPIO C2

Per ipotesi $(7, n) = 1$, *allora* $n^{\varphi(7)} \equiv 1\ (7)$. *Ma* $\varphi(7) = 6$, *quindi* $n^6 \equiv 1\ (7)$, *da cui, per le note proprietà delle congruenze,* $n^{12} = (n^6)^2 \equiv 1\ (7)$ *ovvero* $n^{12} - 1 \equiv 0\ (7)$ *e dunque* $7 \mid n^{12} - 1$.

Ho sfruttato il Teorema di Eulero seguente:

Per il Teorema di Eulero, se a ed n sono due interi positivi tali che $(a, n) = 1$, *allora* $a^{\varphi(n)} \equiv 1\ (n)$.

che esprime una proprietà delle congruenze; a riprova del fatto che una delle deduzioni della dimostrazioni possono derivare dall'applicazione di una proprietà già nota.

… SE E SOLO SE …

… SE E SOLO SE…

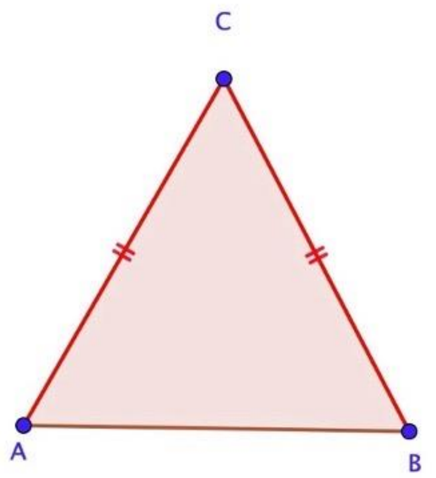
1

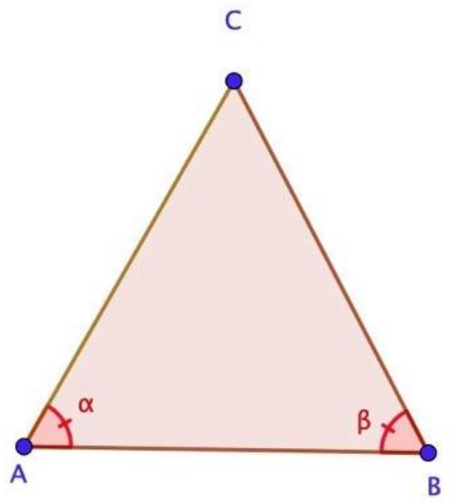
IL TEOREMA DEL TRIANGOLO ISOSCELE

enunciato del teorema

Se un triangolo è isoscele, allora ha due angoli congruenti.

p **t**





Ipotesi p: $AC \cong BC$ **Tesi t:** $\alpha \cong \beta$

DIMOSTRAZIONE

Tracciamo la bisettrice CD dell'angolo $\angle C$.

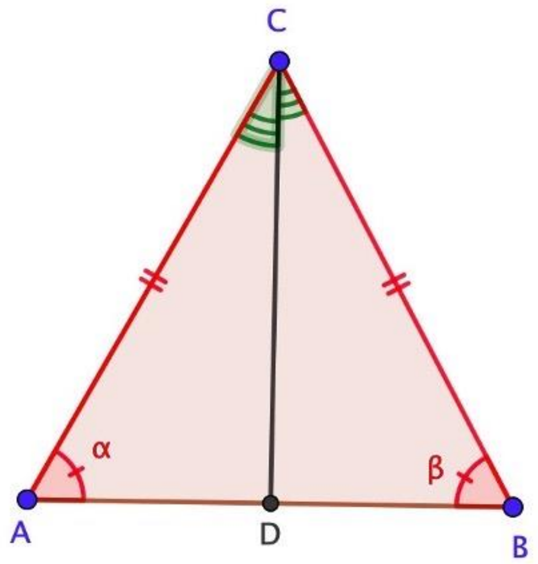
I triangoli ABC e BCD hanno:

- $AC \cong BC$ per ipotesi
- CD in comune
- $\angle ACD \cong \angle BCD$ perché CD è bisettrice di $\angle C$.

I triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza.

In particolare:

$$\angle CAD \cong \angle CBD.$$

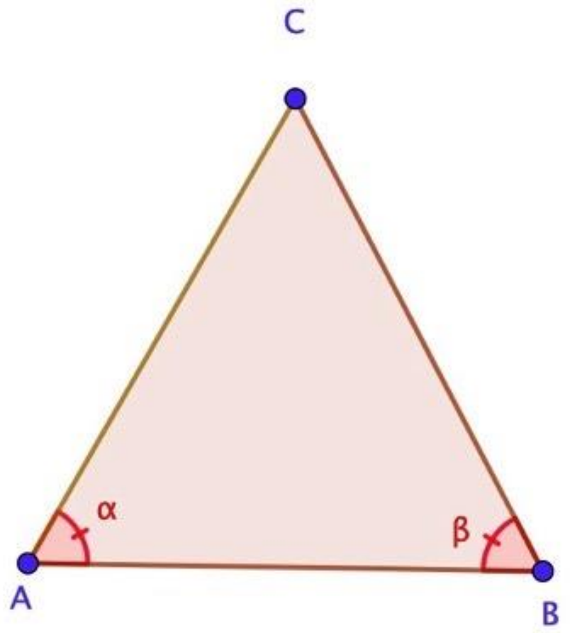


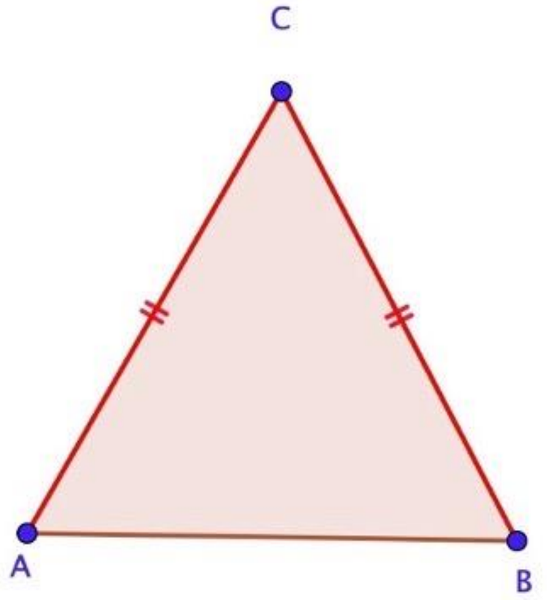
IL TEOREMA INVERSO DEL TRIANGOLO ISOSCELE

enunciato del teorema

Se un triangolo ha due angoli congruenti, allora è isoscele.

p **t**

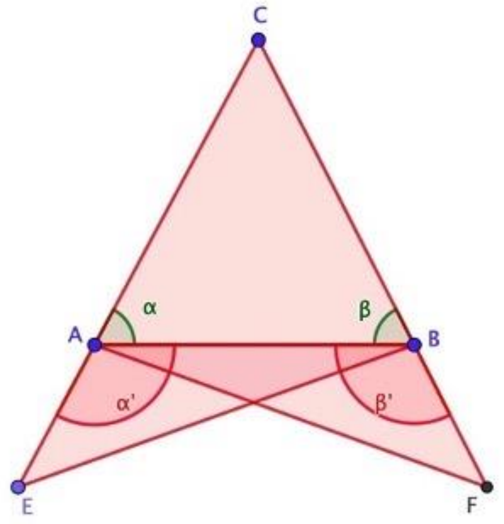




Ipotesi p: $\alpha \cong \beta$ **Tesi t:** $AC \cong BC$

DIMOSTRAZIONE

Prolunghiamo CA e CB mediante due segmenti congruenti, AE e BF, e congiungiamo E con B e A con F. Osserviamo che gli angoli α ed α' sono supplementari, da cui $\alpha' \cong \pi - \alpha$. Idem per β e β', da cui $\beta' \cong \pi - \beta$. Per ipotesi è $\alpha \cong \beta$, dunque, in quanto differenze di angoli congruenti, è anche $\alpha' \cong \beta'$.

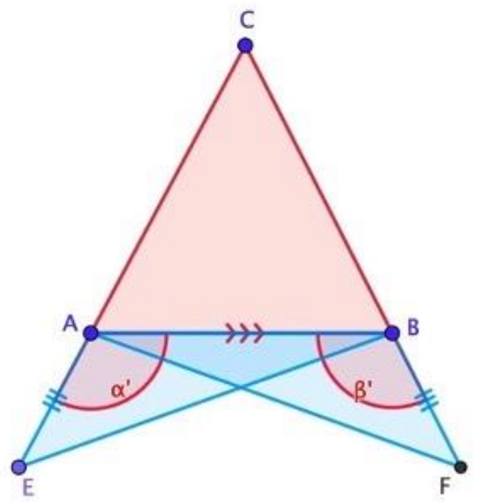


I triangoli ABE e ABF hanno:

- il lato AB in comune
- $AE \cong BF$ per costruzione
- $\alpha' \cong \beta'$ per il precedente passo dimostrativo.

Dunque ABE e ABF sono congruenti per il 1° criterio di congruenza.

In particolare hanno $EB \cong AF, \angle E \cong \angle F, \angle EBA \cong \angle BAF$.

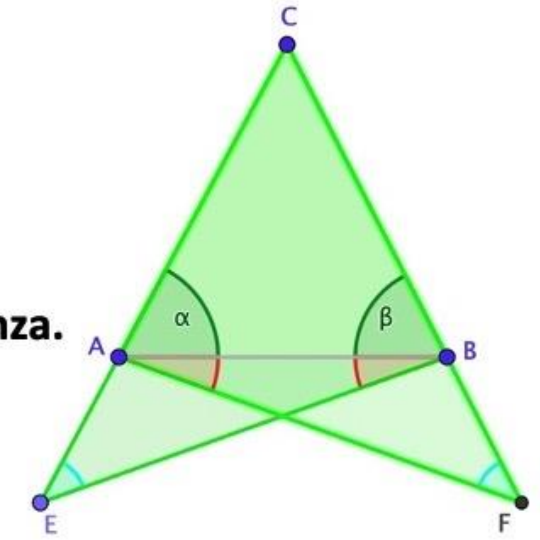


I triangoli CEB e CAF hanno:

- $EB \cong AF$ per il precedente passo dimostrativo
- $\angle E \cong \angle F$ idem
- $\angle EBC \cong \angle CAF$ in quanto somme di angoli congruenti.

Dunque CEB e CAF sono congruenti per il 2° criterio di congruenza.

In particolare hanno $CB \cong CA$.



Quindi il triangolo ABC, avendo due lati congruenti, è isoscele secondo la definizione.

Questi due teoremi sono uno l'inverso dell'altro: ipotesi e tesi sono scambiate

… SE E SOLO SE… 2

Dunque, riassumendo:

1. SE un triangolo è isoscele ALLORA il triangolo ha due angoli congruenti

ma, viceversa:

2. SE il triangolo ha due angoli congruenti ALLORA il triangolo è isoscele

I due teoremi si sono scambiati ipotesi e tesi. Dunque:

un triangolo è isoscele è sufficiente per 1. e necessaria per 2.

il triangolo ha due angoli congruenti è sufficiente per 2. e necessaria per 1.

… SE E SOLO SE… 3

Esiste un modo per riassumere i teoremi 1. e 2. in un unico teorema:

Un triangolo è isoscele **SE E SOLO SE** il triangolo ha due angoli congruenti

che contiene e riassume i due:

1. Un triangolo è isoscele ~~SE E~~ SOLO SE il triangolo ha due angoli congruenti
2. Un triangolo è isoscele SE ~~E SOLO SE~~ il triangolo ha due angoli congruenti

Notate che il teorema 1. è espresso nella forma che evidenzia la condizione necessaria, ma equivale a:

1. SE un triangolo è isoscele ALLORA il triangolo ha due angoli congruenti

Notate che il teorema 2. è espresso nella forma «posposta», ma equivale a

2. SE un triangolo ha due angoli congruenti ALLORA il triangolo è isoscele

… SE E SOLO SE… 4

QUINDI QUANDO RIFORMULATE DUE TEOREMI, UNO INVERSO DELL'ALTRO, CON IL COSTRUTTO **SE E SOLO SE** DOVETE PORRE MOLTA ATTENZIONE.

SE VI VIENE CHIESTO DI DIMOSTRARE UN TALE TEOREMA, **DOVETE PER FORZA DIMOSTRARE, IN SUCCESSIONE, DUE TEOREMI DISTINTI**, IL SECONDO INVERSO DEL PRIMO IN CUI AVETE SCAMBIATO TESI E IPOTESI.

ALLA FINE CONCLUDERETE CHE, VISTO CHE SUSSITONO ENTRAMBI GLI ENUNCIATI, ALLORA ESISTE ANCHE QUELLO UNICO DI PARTENZA.
NON IMPORTA IN QUALE ORDINE PROCEDETE.

… SE E SOLO SE… 5

Un triangolo è isoscele SE E SOLO SE il triangolo ha due angoli congruenti

p *q*

ENTRAMBE LE CONDIZIONI SONO SIA NECESSARIE CHE SUFFICIENTI L'UNA PER L'ALTRA
(INFATTI SI SCAMBERANNO I RUOLI DI SUFFICIENTE E NECESSARIA NELLE DUE DIMOSTRAZIONI INVERSE)

Infatti potete enunciare il teorema anche come:

Il triangolo ha due angoli congruenti SE E SOLO SE il triangolo è isoscele

motivo per cui, quando andrete a dimostrarlo, non ha importanza quale dimostrerete prima

… SE E SOLO SE…

Un triangolo è isoscele SE E SOLO SE il triangolo ha due angoli congruenti

p q

In simboli potete anche enunciare il teorema come segue:

Il triangolo ha due angoli congruenti $\Leftrightarrow$ il triangolo è isoscele

Il simbolo $\Leftrightarrow$ si legge «se e solo se» e si chiama

SIMBOLO DI COIMPLICAZIONE LOGICA

$$p \Leftrightarrow q$$

Si legge: p coimplica q, ovvero p se e solo se q

… SE E SOLO SE…

il simbolo $\Leftrightarrow$ ***(= «coimplica»)***
anche a livello grafico
unisce e riassume i due simboli:
$\Rightarrow$ ***(= «implica») e***
$\Leftarrow$ ***(=«è implicato da»)***

IN UNA COIMPLICAZIONE CIASCUNA DELLE DUE CONDIZIONI E’ SIA NECESSARIA CHE SUFFICIENTE PER L’ALTRA

LA VERITA’ DI UNA DELLE DUE PERMETTE DI CONCLUDERE LA VERITA’ DELL’ALTRA

… SE E SOLO SE… ESEMPIO a1

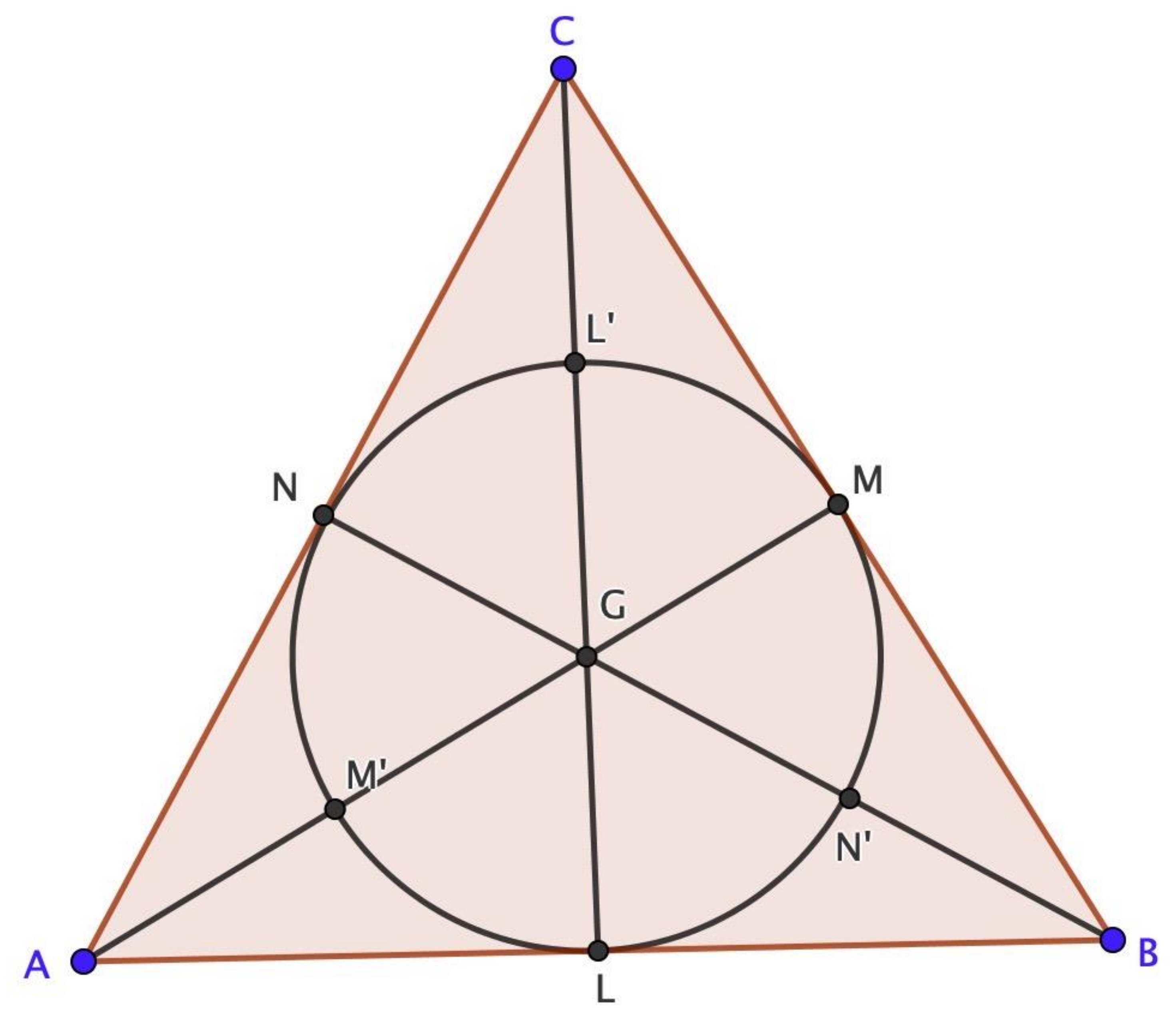
problema 16 gara provinciale 2014

Sia ABC un triangolo acutangolo. Siano AM, BN e CL le mediane, che si intersecano nel baricentro G. Siano M', N' e L' i punti medi di AG, BG e CG, rispettivamente. Mostrare che i sei punti M, M', N, N', L, L' giacciono su una circonferenza se e solo se ABC è equilatero.

Dimostriamo separatamente i due enunciati:

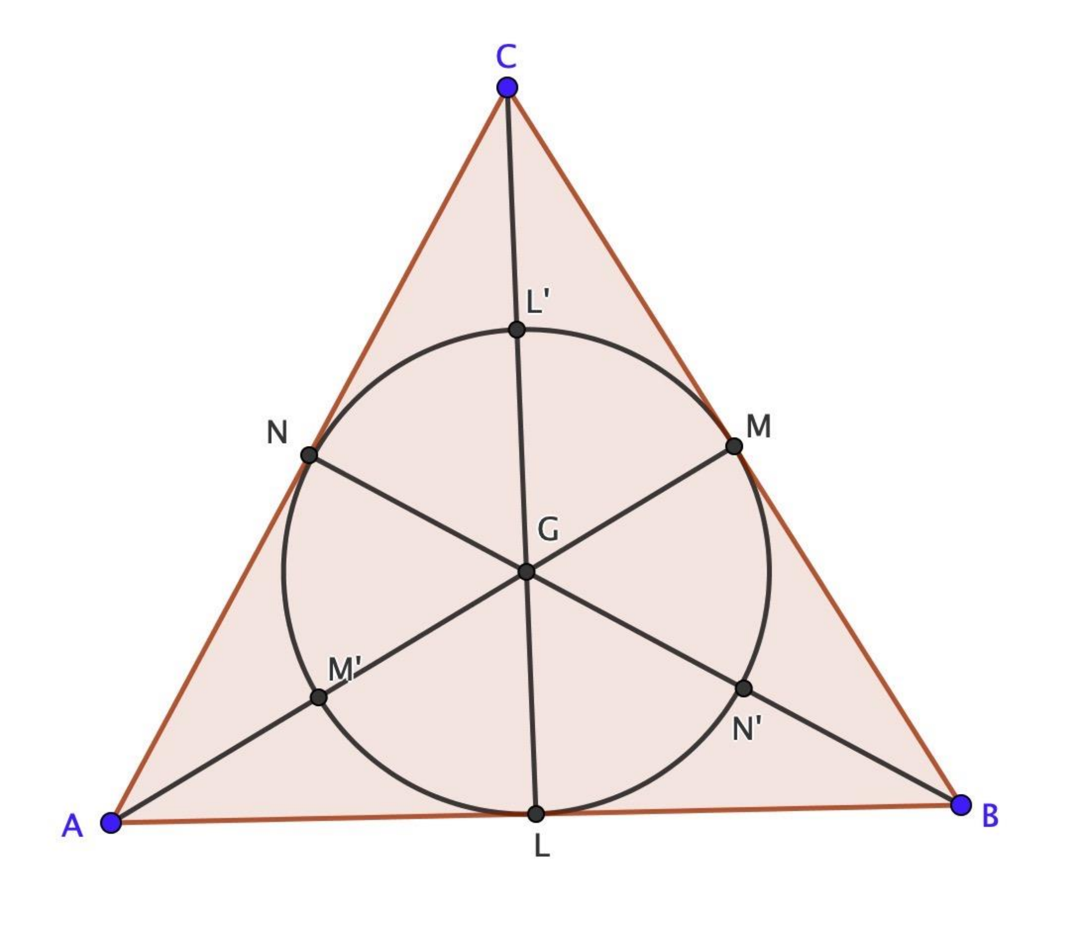
1. *ABC* è un triangolo equilatero $\Longrightarrow$ i 6 punti *M, M', N, N', L, L'* giacciono su una stessa circonferenza

2. i 6 punti *M, M', N, N', L, L'* giacciono su una stessa circonferenza $\Longrightarrow$ ABC *è un triangolo equilatero*



… SE E SOLO SE… ESEMPIO a2

1. ABC è un triangolo equilatero ⟹ i 6 punti *M, M', N, N', L, L'* giacciono su una stessa circonferenza



2. i 6 punti *M, M', N, N', L, L'* giacciono su una stessa circonferenza ⟹
ABC è un triangolo equilatero

Osserviamo che prendendo in considerazione la mediana AM, abbiamo che i tre segmenti AM', $M'G$ e GM sono uguali tra loro, poiché il baricentro divide la mediana in due segmenti uno il doppio dell'altro ed M' è per costruzione il punto medio del segmento più lungo dei due, AG. Un analogo risultato vale per le altre due mediane.

Supponiamo di avere un triangolo equilatero, allora le tre mediane sono uguali tra loro, quindi i punti M, M', N, N', L, L' sono equidistanti da G, cioè giacciono su una circonferenza di centro G.

Supponiamo ora che i sei punti M, M', N, N', L, L' giacciano su una circonferenza di centro O. Tale punto O giace sugli assi dei tre segmenti MM', NN' e LL' e, dal momento che G è punto medio di ciascuno di essi, G ed O si trovano entrambi contemporaneamente sugli assi di tali segmenti. Poiché i tre assi sono distinti, ne deriva che G e O devono coincidere. Ma dunque $GM = GN = GL$ in quanto raggi della stessa circonferenza, e perciò le tre mediane del triangolo ABC, che come affermato in precedenza hanno lunghezza $3GM$, $3GN$, $3GL$, lono uguali tra loro. Un triangolo che ha tutte le mediane uguali è equilatero, poiché per ogni coppia di mediane uguali è isoscele sui due lati cui le mediane sono relative.

TUTTI E SOLI 1

Alle volte nell’enunciato di un teorema, in generale di un predicato, troverete usati i termini:

TUTTI E SOLI

E’, IN ALCUNI CASI, UN’ALTERNATIVA ALL’USO DEI TERMINI

SE E SOLO SE

TUTTI E SOLI

né tutte, né sole

Tutte le circonferenze hanno un'equazione del tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, ma non tutte le equazioni di quel tipo sono circonferenze reali.

tutte ma non sole

Tutte le equazioni $y = ax^2 + bx + c$ rappresentano una parabola, ma non tutte le parabole hanno un'equazione di quel tipo (solo quelle con asse di simmetria parallelo all'asse y).

tutte e sole

Tutte le rette del piano hanno equazione $ax + by + c = 0$ con $(a, b)! = (0, 0)$ e tutte le equazioni di quel tipo sono rette del piano. In questo caso per non ripetere la definizione si può usare la dicitura "L'equazione $ax + by + c = 0$ con $(a, b)! = (0, 0)$ rappresenta tutte e sole le rette del piano".

TUTTI E SOLI

né tutte, né sole

Tutte le circonferenze hanno un'equazione del tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, ma non tutte le equazioni di quel tipo sono circonferenze reali.

SE

una curva è una circonferenza

ALLORA

ha un'equazione di tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Questo teorema non è invertibile, infatti non tutte queste equazioni rappresentano una circonferenza (solo quelle per cui $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0$; per questo il «nè tutte».

Inoltre anche le equazioni in forma

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

rappresentano circonferenze nel piano cartesiano. Per questo il «né sole».

TUTTI E SOLI

tutte ma non sole

Tutte le equazioni $y = ax^2 + bx + c$ rappresentano una parabola, ma non tutte le parabole hanno un'equazione di quel tipo (solo quelle con asse di simmetria parallelo all'asse y).

SE

un'equazione è di tipo $y = ax^2 + bx + c$ (con $a \neq 0$)

ALLORA

rappresenta una parabola nel piano cartesiano

Questo teorema non è invertibile, infatti le parabole con asse orizzontale hanno equazioni diverse; per questo il «ma non sole». Il teorema non è dunque invertibile.

TUTTI E SOLI

tutte e sole

Tutte le rette del piano hanno equazione $ax + by + c = 0$ con $(a, b)! = (0, 0)$ e tutte le equazioni di quel tipo sono rette del piano. In questo caso per non ripetere la definizione si può usare la dicitura "L'equazione $ax + by + c = 0$ con $(a, b)! = (0, 0)$ rappresenta tutte e sole le rette del piano".

una curva nel piano cartesiano è una retta
SE E SOLE SE
ha un'equazione, in forma implicita, di tipo $\boldsymbol{ax+by+c=0}$,
con $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ non contemporaneamente nulli

Questo teorema è invertibile; per questo il «tutte e sole».

TUTTI E SOLI

valgono **tutti e soli** i casi che soddisfano una certa proprietà
si intende che:
1. **Tutti** gli oggetti che hanno quella proprietà appartengono all'insieme considerato
2. **Solo** gli oggetti che hanno quella proprietà appartengono a quell'insieme

In altre parole: **né di più, né di meno.**

In termini logici

"tutti e soli" equivale a dire:

A se e solo se B

cioè una **equivalenza**:

- A ⟺ B, A⟺B,
- **"tutti"** → se vale B, allora vale A
- **"soli"** → se vale A, allora vale B

Esempio semplice:

I numeri **pari sono tutti e soli** quelli divisibili per 2.

Significa che:

- **Tutti** i numeri divisibili per 2 sono pari ✔
- **Solo** i numeri divisibili per 2 sono pari ✔

Quindi:

numero pari ⟺ divisibile per 2

Altro esempio (geometria):

I triangoli **rettangoli sono tutti e soli** quelli che hanno un angolo di 90°.

- Se un triangolo è rettangolo → **ha** un angolo di 90°
- Se un triangolo ha un angolo di 90° → **è** rettangolo

Perfetta corrispondenza.

TUTTI E SOLI

Perché è importante?

In matematica le definizioni devono essere **precise**.

Dire “tutti e soli” evita errori come:
•includere casi che non c’entrano
•escludere casi che invece dovrebbero esserci

È il modo matematico per dire:
“questa proprietà descrive **esattamente** quell’insieme”.

Attenzione: errore comune
Dire solo “**tutti**” o solo “**soli**” **non basta a definire un insieme.**
❌ *“Tutti i multipli di 4 sono i pari”* (vero che tutti i multipli di 4 sono pari, ma questo non definisce i pari)
✔ *“I numeri pari sono tutti e soli i multipli di 2”*

Esempio: “tutti e soli” in un esercizio di algebra

Esercizio

Stabilire per quali valori di x vale:

$$\boldsymbol{x^2 = 9}$$

Soluzione spiegata con il “tutti e soli”
I numeri che soddisfano l’equazione sono **tutti e soli** quelli tali che:

$$x = 3 \text{ oppure } x = -3$$

Cosa vuol dire?
•**Tutti** i valori +3 e -3 soddisfano l’equazione ✔
•**Solo** quei valori la soddisfano ✔

Quindi:
$\boldsymbol{x^2 = 9} \iff x = 3$ oppure $x = -3$

IMPLICAZIONE E COIMPLICAZIONE LOGICA vs IMPLICAZIONE E COIMPLICAZIONE MATERIALE 1

ABBIAMO ATTRIBUITO UN SIGNIFICATO AI SIMBOLI:

$\Longrightarrow$ IMPLICAZIONE LOGICA (SE … ALLORA …)

$\Longleftrightarrow$ COIMPLICAZIONE LOGICA (… SE E SOLO SE …)

CHE ABBIAMO USATO PER **RAPPRESENTARE DEDUZIONI LOGICHE**,
OVVERO PER **FARE INFERENZE LOGICHE NEI RAGIONAMENTI DIMOSTRATIVI**

ESISTONO TUTTAVIA ALTRI DUE SIMBOLI:

$\rightarrow$ IMPLICAZIONE MATERIALE

$\leftrightarrow$ COIMPLICAZIONE MATERIALE

CHE SONO INVECE **OPERATORI LOGICI DEFINITI DALLE LORO TABELLE DI VERITA'**
E CHE **NON SONO USATI PER FARE INFERENZE LOGICHE NEI RAGIONAMENTI DIMOSTRATIVI**

SONO «ESERCIZI» DI LOGICA FORMALE, ESATTAMENTE COME AND, OR, NOT, …

IMPLICAZIONE MATERIALE 1

DEFINIZIONE

L'**implicazione materiale** di due proposizioni p e q è la proposizione "**se p allora q**", che risulta falsa solo se p è vera e q è falsa. In tutti gli altri casi è vera.

È definita dalla sua tavola di verità:

TAVOLA DI VERITA' DI $p \rightarrow q$		
p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Si scrive $\boldsymbol{p \rightarrow q}$ *e si legge "**p implica q**", "**se p allora q**", meno usualmente "da p segue q", "q segue da p", "q è implicato da p".*
***p** si chiama **antecedente** (o causa), **q** si chiama **conseguente** (o conseguenza).*

ESEMPIO

1. "Se 7 è un numero dispari allora 7 è divisibile per 3" è un'implicazione falsa. Infatti:
   p="7 è un numero dispari" è vera
   q="7 è divisibile per 3" è falsa
   L'implicazione $\boldsymbol{p \rightarrow q}$ risulta falsa (seconda riga della tavola di verità)

2. "Se 6 è un numero pari allora 6 è divisibile per 2" è un'implicazione vera. Infatti:
   p="6 è un numero pari" è vera
   q="6 è divisibile per 2" è vera
   L'implicazione $\boldsymbol{p \rightarrow q}$ risulta vera (prima riga della tavola di verità)

QUESTO OPERATORE $\rightarrow$ CHIARAMENTE E' COLLEGATO A QUELLO DI IMPLICAZIONE LOGICA $\Rightarrow$, NEL SENSO CHE CI DICE QUALI SONO LE POSSIBILI INFERENZE VERE DI UNA IMPLICAZIONE LOGICA $\Rightarrow$:

- **A VERA IMPLICA B VERA** è una verità anche dell'implicazione logica, se la premessa è vera lo è anche la conseguenza
- **A FALSA MA B COMUNQUE VERA** può essere una verità anche dell'implicazione logica, che nulla ci dice se la premessa A è falsa
- **A FALSA E B PURE FALSA** può essere una verità anche dell'implicazione logica, che nulla ci dice se la premessa A è falsa

MENTRE

- **A VERA E B FALSA** **non è mai una verità dell'implicazione logica,** perché se A è vera abbiamo visto che anche B è necessariamente vera

DOPPIA IMPLICAZIONE (= COIMPLICAZIONE) MATERIALE 1

DEFINIZIONE

La **doppia implicazione** di due proposizioni p e q è la proposizione "***p se e solo se q***", che risulta vera quando p e q sono entrambe vere o entrambe false. In tutti gli altri casi è falsa.

È definita dalla sua tavola di verità:

TAVOLA DI VERITA' DI $p \leftrightarrow q$		
p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Si scrive $\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$ *e si legge "**p coimplica q**", o, più comunemente, "**p se e solo se q**".*

QUESTO OPERATORE ↔ CHIARAMENTE E' COLLEGATO A QUELLO DI COIMPLICAZIONE LOGICA ⟺, NEL SENSO CHE CI DICE QUALI SONO LE POSSIBILI INFERENZE VERE DI UNA COIMPLICAZIONE LOGICA ⟺:

- A VERA COIMPLICA B VERA è una verità anche della coimplicazione logica, se una delle due (A o B che sia) è vera, lo è anche l'altra
- A FALSA COIMPLICA ANCHE B FALSA è una verità anche della coimplicazione logica, perché se una delle due fosse vera dovrebbe esserlo anche l'altra, l'unica alternativa possibile è che siano entrambe vere

MENTRE

- **A VERA E B FALSA o A FALSA E B VERA non sono mai una verità della coimplicazione logica,** A e B o sono contemporaneamente vere o sono contemporaneamente false, sono strettamente legate l'una all'altra, hanno lo stesso … destino

IMPLICAZIONE E COIMPLICAZIONE LOGICA vs IMPLICAZIONE E COIMPLICAZIONE MATERIALE 2

DOMANDONA

SONO NATE PRIMA

$\rightarrow$ E $\leftrightarrow$ (IMPLICAZIONE E COIMPLICAZIONE MATERIALI)

O

$\Longrightarrow$ E $\Longleftrightarrow$ (IMPLICAZIONE E COIMPLICAZIONE LOGICA) ?

IMPLICAZIONE E COIMPLICAZIONE LOGICA vs IMPLICAZIONE E COIMPLICAZIONE MATERIALE 3

E' UN PO' COME CHIEDERSI:

E' NATO PRIMA L' 

O E' NATA PRIMA LA  ?

IMPLICAZIONE E COIMPLICAZIONE LOGICA vs IMPLICAZIONE E COIMPLICAZIONE MATERIALE 3

IN REALTA':

La distinzione è stata dibattuta fin dai tempi dei filosofi greci, tanto che l'implicazione materiale è anche conosciuta come "implicazione filoniana" (da Filone di Megara, III secolo a.C.), e l'altra come "implicazione diodorea" (da Diodoro Crono, IV secolo a.C.). **Dunque è nata prima quella materiale.**

In tempi moderni C.S. Peirce (1839 - 1914) concluse che per gli aspetti *elementari* della Logica era conveniente utilizzare l'*implicazione materiale*.

L'implicazione logica è una relazione più forte, una «**tautologia**» (= **un' affermazione sempre vera**), che esprime una necessità logica, **un'inferenza sempre vera**, che è stata concepita e studiata *dopo* aver definito quella materiale, usandola come base per definire le inferenze logiche vere (=legittime, corrette) nei ragionamenti. Quindi è venuta prima la materiale (come connettivo) per poi definire la logica (come relazione di necessità).

IMPLICAZIONE E COIMPLICAZIONE LOGICA vs IMPLICAZIONE E COIMPLICAZIONE MATERIALE 4

RIBADIAMO:

Il valore di verità di un enunciato composto con l'implicazione (o con la coimplicazione) materiale dipende dai valori di verità degli enunciati che lo compongono.

Un'implicazione (o una coimplicazione) logica non è un connettivo logico, bensì una relazione di deduzione tra predicati.

IMPLICAZIONE E COIMPLICAZIONE LOGICA vs IMPLICAZIONE E COIMPLICAZIONE MATERIALE 5

Voi dovete solo porre attenzione ai simboli usati e ai loro nomi:

$\rightarrow$ E $\leftrightarrow$ (IMPLICAZIONE E COIMPLICAZIONE MATERIALI)

$\Longrightarrow$ E $\Longleftrightarrow$ (IMPLICAZIONE E COIMPLICAZIONE LOGICHE)

Per dimostrare usate i secondi $\Longrightarrow$ e $\Longleftrightarrow$!!

DIMOSTRAZIONI PER ASSURDO

DIMOSTRAZIONI PER ASSURDO 1

ESEMPIO

L'opposto di un numero intero n è quell'intero n' che sommato ad n dà 0.
ASSIOMA: ogni intero n ha un numero opposto.
L'elemento neutro rispetto all'addizione è lo 0, ovvero $0+n=n+0=n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

TEOREMA

L'opposto di n è unico, $\forall n \in \mathbb{Z}$.
Ipotesi: n' è l'opposto di n$\in \mathbb{Z}$. Tesi: n' è unico.

Come si vede nella tabella a lato, si inizia negando la tesi, ovvero aggiungendo un'ipotesi che la nega.
Attraverso una successione di passi dimostrativi si giunge a una **contraddizione**.
Ricordiamo che per il **principio del terzo escluso** una proposizione può essere solo o vera o falsa e che per il **principio di non contraddizione** non possono essere vere contemporaneamente una proposizione e la sua negazione; **dunque il vulnus è stato l'avere aggiunto alle ipotesi la negazione della tesi**.

Passo numero:	*dimostrazione*	*spiegazione*
1	Siano n' e n'' due opposti **distinti** del numero n	Aggiungiamo, come ipotesi, una proposizione che nega della tesi
2	$n+n'=0$	Definizione di opposto: la somma di un numero con il suo opposto fa zero
3	$n+n''=0$	Sempre definizione di opposto
4	$(n'+n)+n''=n'+(n+n'')$	Applichiamo la proprietà associativa dell'addizione
5	$0+n''=n'+0$	Sostituiamo alle quantità tra parentesi tonda lo 0, per i passi 2 e 3
6	$n''=n'$	In quanto 0 è l'elemento neutro rispetto all'addizione
7	Dunque i due opposti sono uguali tra loro	Siamo caduti in contraddizione con quanto asserito nel passo numero 1

DIMOSTRAZIONI PER ASSURDO 2

Le dimostrazioni che usano
Lo schema di ragionamento per assurdo
(negazione della tesi per giungere a negare l’ipotesi)
usano lo schema di ragionamento detto
MODUS TOLLENS

DIMOSTRAZIONI PER ASSURDO 3

UNA TALE FORMA DI DIMOSTRAZIONE SI PUO' SCHEMATIZZARE COME SEGUE:

Se devo dimostrare che $p \Longrightarrow q$, aggiungo l'ipotesi $\neg q$ (cioè provo a negare la tesi) e dimostro che $p \wedge \neg q \Longrightarrow \neg p$ (p e l'opposto della tesi implicano l'opposto dell'ipotesi), il che è una contraddizione dal momento che sappiamo essere vera l'ipotesi p; per il principio del terzo escluso infatti un predicato o è vero o è falso, ma non può essere contemporaneamente vero e falso.

DIMOSTRAZIONI PER ASSURDO ESEMPIO a1

PROBLEMA 5 – teoria dei grafi
Dimostrare che, dati 5 punti sul piano, è impossibile collegare con delle linee ogni punto a tutti gli altri in maniera tale che le linee non si intersechino.

Dalla gara di play off del 2024 del Distretto di Treviso

DIMOSTRAZIONI PER ASSURDO ESEMPIO a2

Supponiamo per assurdo di avere tracciato i cinque punti e di averli collegati a due a due senza mai intrecciare le linee di collegamento. Consideriamo la figura che ne è risultata come un grafo in cui i punti sono i vertici (nodi) e i collegamenti gli archi (spigoli). Visto che abbiamo ipotizzato di non avere mai intrecciato gli archi si tratta di un grafo planare con $\boldsymbol{V} = \mathbf{5}$ *vertici e* $\boldsymbol{S} = \binom{5}{2} = \mathbf{10}$ *archi.*

Dal momento che abbiamo supposto il grafo essere planare, sappiamo anche che esso soddisfa la relazione di Eulero $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{V} = \boldsymbol{S} + \mathbf{2}$*, con* $\boldsymbol{F}$ *numero delle regioni in cui abbiamo diviso il piano mediante il grafo (inclusa quella esterna al grafo). Si ottiene* $\boldsymbol{F} + \mathbf{5} = \mathbf{10} + \mathbf{2}$*, da cui* $\boldsymbol{F} = \mathbf{7}$*.*
Cerchiamo di stabilire tra $\boldsymbol{F}$ *e* $\boldsymbol{S}$ *una relazione anche in altro modo. Dato che ogni faccia del grafo deve essere delimitata da almeno 3 archi e che ogni arco è in comune tra due facce, si ha che* $\mathbf{3} \cdot \boldsymbol{F} \leq \boldsymbol{S} \cdot \mathbf{2}$*, ovvero* $\boldsymbol{S} \geq \frac{3 \cdot F}{2}$*, e, sostituendo a* $\boldsymbol{F}$ *il valore* $\mathbf{7}$ *precedentemente trovato,* $\boldsymbol{S} \geq \frac{3 \cdot 7}{2}$ *ovvero* $\boldsymbol{S} \geq \frac{21}{2}$*, in contraddizione con il valore* $\mathbf{10}$ *precedentemente trovato. Dunque siamo in contraddizione per avere negato la tesi, che risulta pertanto vera.*

DIMOSTRAZIONI PER ASSURDO 4

In quest'ultimo esempio a1- a2 abbiamo negato la tesi ma non siamo arrivati a negare l'ipotesi, ci siamo fermati prima. Siamo semplicemente arrivati a valutare una stessa grandezza (S) con due diversi e contradditori valori. Questo schema di ragionamento non è quello presentato in precedenza (MODUS TOLLENS), ma è uno schema più propriamente e genericamente detto

PER ASSURDO

DIMOSTRAZIONI PER ASSURDO 5

UNA TALE FORMA DI DIMOSTRAZIONE
SI PUO' SCHEMATIZZARE COME SEGUE:

Se devo dimostrare che $\boldsymbol{p \Rightarrow q}$, aggiungo l'ipotesi $\boldsymbol{\neg q}$ (cioè provo a negare la tesi) e dimostro che:

$$(\boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q} \Rightarrow \boldsymbol{a}) \wedge (\boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q} \Rightarrow \neg \boldsymbol{a})$$

Ovvero che $\boldsymbol{p}$ e l'opposto della tesi $\boldsymbol{\neg q}$ implicano una nuova proposizione $\boldsymbol{a}$ ma anche il contrario di questa ulteriore proposizione $\boldsymbol{\neg a}$, il che è una contraddizione, sempre per il principio del terzo escluso. Questo è uno schema di ragionamento più generale del modus tollens, ma altrettanto efficace.

DIMOSTRAZIONI PER INDUZIONE

DIMOSTRAZIONI PER INDUZIONE 1

P(n) esprime un enunciato in cui compare il numero naturale *n*
Esempio: $P(n)$=«La somma dei primi n numeri naturali vale $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$»

E' necessario concludere con questa frase, è l'ultimo passaggio della dimostrazione

Il principio di induzione è un metodo per dimostrare proprietà che dipendono da un numero naturale n.

È un tipo di ragionamento che si basa su due passi.

Vogliamo dimostrare che una proposizione $P(n)$ dipendente da $n \in \mathbb{N}$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Primo passo: si dimostra che $P(n)$ è vera per $n = 0$.

Secondo passo: supponendo vera la proposizione $P(n)$, si dimostra che è vera $P(n+1)$, cioè la proposizione associata al valore successivo di n.

In questo modo, a partire da $n = 0$, è *dimostrato* che la proposizione $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

DIMOSTRAZIONE **=** *enunciare* $P(n)$ **+** *dimostrare il 1° passo induttivo* $P(0)$ **+** *dimostrare il 2° passo induttivo ovvero* $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ **+** *concludere dicendo che allora* $P(n)$ *è vera per ogni* $n \in \mathbb{N}$

DIMOSTRAZIONI PER INDUZIONE 2

Lo stesso schema di ragionamento può essere applicato a partire da un valore $n = k, k > 0, k \in \mathbb{N}$, anziché da $n = 0$. Si dimostra cioè come primo passo induttivo che è vera la proposizione $P(k)$ anziché la $P(0)$.

Allora il principio di induzione, nella forma più generale, diventa:

Data una proposizione $P(n)$, con $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, n \geq k$; se

1. **è vera $P(k)$**
2. **ipotizzata vera $P(n)$, allora è vera anche $P(n+1)$**

allora $P(n)$ è vera per ogni $n \geq k$.

Questa è la diversità; la proposizione $P(n)$ non sarà vera per tutti gli n naturali, ma solo per quelli maggiori o uguali al ***valore iniziale k***

DIMOSTRAZIONE IN QUESTO CASO = enunciare $P(n)$ + dimostrare il 1° passo induttivo $P(k)$ + dimostrare il 2° passo induttivo ovvero $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ + concludere dicendo che allora $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq k$

DIMOSTRAZIONI PER INDUZIONE 3

$P(n)$

Dimostriamo per induzione l'uguaglianza

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Primo passo

Se $n = 1 \rightarrow \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \rightarrow$ l'uguaglianza è vera.

Secondo passo

Ammettiamo che l'uguaglianza sia vera per n e dimostriamo che è vera per $n+1$, cioè dimostriamo che

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}=1-\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Poiché per ipotesi $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$, il primo membro diventa:

$$1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}=1-\frac{2-1}{2^{n+1}}=1-\frac{1}{2^{n+1}}.$$

L'uguaglianza è verificata.

Essendo vere entrambe le condizioni del principio di induzione, concludiamo che l'uguaglianza data è vera $\forall n \geq 1$.

OSSERVAZIONE – SIMBOLO DI SOMMATORIA

È possibile riscrivere in modo più sintetico l'uguaglianza dell'esempio utilizzando il simbolo di *sommatoria*:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

In generale, la notazione $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a_i}$ si legge «sommatoria in i da 1 a n di a_i» e indica la somma di tutti i termini a_i per i che varia da 1 a n.

INDUZIONE ESEMPIO A1

Esempio: "la somma dei numeri da 0 a n è uguale a $\frac{n(n+1)}{2}$

$p(n)$

$P(n)$

① $p(0)$ è vera?

$0 =$ somma dei naturali da 0 a 0

$\frac{0 \cdot 1}{2} = 0$

② $p(k+1)$ dice che $\sum_{i=0}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$

Sappiamo già che $\boxed{\sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}}$

$$\sum_{i=0}^{k+1} i = \boxed{\left(\sum_{i=0}^{k} i\right)} + (k+1) = \boxed{\frac{k(k+1)}{2}} + (k+1) =$$

ipotesi induttiva

$$= (k+1)\left[\frac{k}{2} + 1\right] = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Dunque il predicato $P(n)$ è vero per ogni n

Esempio da http://olimpiadi.dm.unibo.it/il-senior-in-pillole/

INDUZIONE ESEMPIO A2

Esempio

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$P(n)$

① $$\sum_{i=0}^{0} i^2 = 0 = \frac{0 \cdot 1 \cdot 1}{6}$$

② Supponiamo che per un certo $k \in \mathbb{N}$ valga $\sum_{i=0}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

$$\sum_{i=0}^{k+1} i^2 = \left(\sum_{i=0}^{k} i^2\right) + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

Scomponete usando la regola di Ruffini

$$= (k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right] = (k+1)\left[\frac{2k^2+k+6k+6}{6}\right]$$

$$= (k+1)\left[\frac{(k+2)(2k+3)}{6}\right] = \frac{(k+1)\cdot(k+1+1)\cdot(2(k+1)+1)}{6}$$

Dunque il predicato $P(n)$ è vero per ogni n

Esempio da http://olimpiadi.dm.unibo.it/il-senior-in-pillole/

INDUZIONE ESTESA 1

Induzione estesa

Se valgono le seguenti

1. $p(0)$ è vera
2. Per ogni k, assumendo che $p(0), p(1), \dots, p(k)$ sono vere, allora anche $p(k+1)$ è vera

Allora $p(n)$ è vera per ogni n

Esempio da http://olimpiadi.dm.unibo.it/il-senior-in-pillole/

Nel secondo passo si dimostra che, se si ipotizza $P(i)$ vero per ogni altro i minore di $k+1$, ovvero per $i = 1, 2, 3, \dots, k$ allora esso è vero anche per $i = k$

Si può usare questa forma, detta ***INDUZIONE ESTESA***

INDUZIONE CONTROESEMPIO CA1

Fibonacci

$F_0 = 0 \quad F_1 = 1 \quad F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ per $k \geq 1$

$0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots$

Errore comune: passo base insufficiente

Teo (Falso) Ogni F_n è pari

$P(n)$

DIM Passo base $n=0$ $\quad F_0 = 0$ è pari

Passo induttivo $\underbrace{F_{k+1}}_{\text{pari}} = \underbrace{F_k}_{\text{pari}} + \underbrace{F_{k-1}}_{\text{pari}}$ perché

$k-1, k < k+1$

Ma per $k=0$, F_1 è definito come 1

e non come $F_0 + F_{-1}$ non esiste

Questa è la «Successione di Fibonacci», in cui $F_0 = 0, F_1 = 1,$ e ogni altro elemento è la somma dei due precedenti.

ERRORE GROSSOLANO! *Avere trascurato (erroneamente) che $P(1)$ non sia vera, in quanto $F_1 = 1$ è dispari!!*
Qui $P(0)$ è vera ma $P(1)$ è falsa».
Nel dimostrare bisogna utilizzare un passo iniziale di una proprietà che poi si deve «propagare» a tutti i numeri successivi.
Dunque questo errore invalida l'intera dimostrazione che risulta

GRAVEMENTE ERRATA

ATTENZIONE! IL PASSO BASE DI UN'INDUZIONE DEVE ESSERE SCELTO ACCURATAMENTE!

Controesempio tratto da http://olimpiadi.dm.unibo.it/il-senior-in-pillole/

LA DISCESA INFINITA 1

La **discesa infinita** è una tecnica di dimostrazione matematica, usata soprattutto nella teoria dei numeri, che funziona per assurdo:

si suppone che **esista una soluzione intera** a un problema, si dimostra che **da tale soluzione se ne può sempre ricavare una più piccola**, e **questo processo, se ripetuto all'infinito, crea una contraddizione (poiché i numeri interi positivi non possono diminuire indefinitamente), provando così che la soluzione iniziale non poteva esistere**.

È imparentata con il principio di induzione matematica e usata da Fermat per dimostrare casi specifici del suo ultimo teorema (come $a^4 + b^4 = c^4$)

LA DISCESA INFINITA 2

Applicando questo metodo, se si vuole dimostrare che una proposizione è falsa, si suppone che essa sia valida per un certo n (naturale!); se si riesce a dimostrare che questo implica che essa sia valida anche per un altro intero m minore di n abbiamo completato la nostra dimostrazione: ripetendo infatti il ragionamento, esisterebbe un terzo numero p minore di m per cui vale ancora la proposizione; iterando questo ragionamento si otterrebbe che esistono infiniti numeri interi positivi minori di n che la verificano. Questo è assurdo (perché i naturali hanno un minimo che è 0), e quindi la proposizione è falsa.

Un altro modo alternativo per impostare la dimostrazione è provare a dimostrare che: SE esiste un insieme composto da alcuni numeri n che godono di una certa proprietà ALLORA deve esistere il minimo. Ma, dimostrando che, una volta preso il minimo, se ne possa trovare uno più piccolo contraddiciamo la nostra ipotesi e cadiamo in assurdo. CIOE': NON SI PUO' FARE UNA «DISCESA INFINITA» NEI NATURALI.

LA DISCESA INFINITA 3

Dalla TRECCANI:
discesa infinita, metodo della: particolare metodo di dimostrazione per assurdo, utilizzato nella teoria dei numeri, basato sul principio d'induzione matematica. Il metodo si basa sul principio che se $\{s_n\}$ è una successione di numeri naturali decrescente, allora esiste una sua sottosuccessione, da un certo n in poi, che è costante. **Per dimostrare, quindi, che una proposizione *P* sui numeri naturali è falsa, si suppone (per assurdo) che sia vera per un certo *n* e se si dimostra che ciò implica che essa sia vera anche per un *m* < *n*, allora si è dimostrata la falsità di *P*. Infatti, si potrebbe iterare il ragionamento ed esisterebbe un *p* < *m* per cui essa è vera e, così procedendo, si otterrebbero infiniti valori minori di *n* che la rendono vera. Ciò è falso perché ogni sottoinsieme finito di numeri naturali ha un minimo.** Il metodo della discesa infinita fu usato da P. de Fermat per dimostrare il suo ultimo teorema (➔ Fermat, ultimo teorema di) nel caso particolare di $n = 4$.

LA DISCESA INFINITA 4

Come funziona il metodo

1. Supponiamo l'esistenza di una soluzione: Si parte dall'assunto che esista una soluzione intera positiva (=naturale maggiore di 0) per l'equazione o il problema o la proprietà in questione.

2. Troviamo una soluzione minore: dimostriamo che, se esiste una soluzione, ne deve esistere necessariamente una minore, anch'essa naturale e positiva.

3. Contraddizione: Questo crea una catena infinita di soluzioni decrescenti (es. $n>n1>n2>\dots$), che è impossibile per i numeri naturali positivi (non esiste un numero naturale positivo minore di 1). **Stiamo lavorando sui naturali positivi!**

4. Conclusione: La contraddizione dimostra che l'assunto iniziale (l'esistenza di una soluzione) è falso, quindi non esistono soluzioni naturali (o non esistono soluzioni con la proprietà descritta o il problema è assurdo).

LA DISCESA INFINITA ESEMPIO (accenno) a1

TEOREMA DI FERMAT NEL CASO n=4

Come funziona l'esempio $x^4 + y^4 = z^4$

1. **Assunzione:** Supponiamo che esistano interi positivi x, y, z che soddisfano l'equazione.
2. **Manipolazione:** Si riscrive come $x^4 + y^4 = (z^2)^2$, trattandola come una terna pitagorica.
3. **Derivazione:** Attraverso passaggi algebrici, si dimostra che se esiste una soluzione (x, y, z), allora deve esistere una nuova soluzione (x', y', z') con $z' < z$, e x', y', z' sono ancora interi positivi.
4. **Assurdo:** Questo processo può essere ripetuto all'infinito, creando una sequenza decrescente infinita di interi positivi $(z, z', z'', \ldots)$.
5. **Conclusione:** Poiché non esistono infinite sequenze decrescenti di interi positivi (ogni sequenza deve fermarsi a 1, per il principio del buon ordinamento), l'assunzione iniziale deve essere falsa.

LA DISCESA INFINITA

ESEMPIO b2-1

La somma di due quadrati, $a^2 + b^2$, è divisibile per 3 **solo se entrambi i numeri a e b sono divisibili per 3**, ovvero $a \equiv 0 \pmod 3$ e $b \equiv 0 \pmod 3$, perché un quadrato modulo 3 può essere solo 0 o 1, e l'unica combinazione che dà 0 è $0 + 0$.

Spiegazione dettagliata

1. **Quadrati modulo 3**: Consideriamo i resti della divisione per 3 (i numeri modulo 3):
   - Se un numero n è multiplo di 3 ($n \equiv 0 \pmod 3$), allora $n^2 \equiv 0^2 \equiv 0 \pmod 3$.
   - Se un numero n ha resto 1 ($n \equiv 1 \pmod 3$), allora $n^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod 3$.
   - Se un numero n ha resto 2 ($n \equiv 2 \pmod 3$), allora $n^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod 3$.
   - Quindi, un quadrato è sempre 0 o 1 modulo 3.
2. **Somma di due quadrati modulo 3**:
   - $0 + 0 = 0$ (divisibile per 3)
   - $0 + 1 = 1$ (non divisibile per 3)
   - $1 + 0 = 1$ (non divisibile per 3)
   - $1 + 1 = 2$ (non divisibile per 3)
3. **Conclusione**: Affinché $a^2 + b^2$ sia divisibile per 3, la somma dei loro resti modulo 3 deve essere 0, il che accade solo se entrambi a^2 e b^2 sono 0 modulo 3. Questo significa che sia a che b devono essere multipli di 3.

Esempio: $3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45$, che è divisibile per 3. Anche $3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$, che non è divisibile per 3.

LEMMA

SE $a^2+b^2 \equiv 0 \; modulo \; 3$

(ovvero $a^2 + b^2$ **è divisibile per 3**)

ALLORA (necessariamente)

$a \equiv 0 \; \wedge b \equiv 0 \; modulo \; 3$

(**ovvero sia a che b devono essere entrambi divisibili per 3**)

LA DISCESA INFINITA ESEMPIO b2-2

Una semplice applicazione di questo metodo permette di dimostrare che l'equazione diofantea $x^2 + y^2 = 3(z^2 + w^2)$ non ha soluzioni in numeri interi (esclusa la soluzione banale $x = y = z = w = 0$): se infatti ne esistesse una (x_0, y_0, z_0, w_0), allora si avrebbe $x_0^2 + y_0^2 \equiv 0 \mod 3$ (con le notazioni dell'aritmetica modulare), e questo è possibile solamente se sia x_0 che y_0 sono divisibili per 3; quindi ponendo

$$x_0 = 3x_1,\ y_0 = 3y_1$$

e sostituendoli nell'equazione originaria, abbiamo

$$(3x_1)^2 + (3y_1)^2 = 3(z_0^2 + w_0^2)$$
$$3(x_1^2 + y_1^2) = z_0^2 + w_0^2$$

che è ancora un'equazione nella forma precedente. Anche in questo caso z_0 e w_0 sono multipli di 3, e quindi

$$x_1^2 + y_1^2 = 3(z_1^2 + w_1^2)$$

e quindi (x_1, y_1, z_1, w_1) è ancora una soluzione dell'equazione, in cui ogni componente della soluzione è minore della componente corrispondente della soluzione precedente. Quindi per la discesa infinita non possono esserci soluzioni.

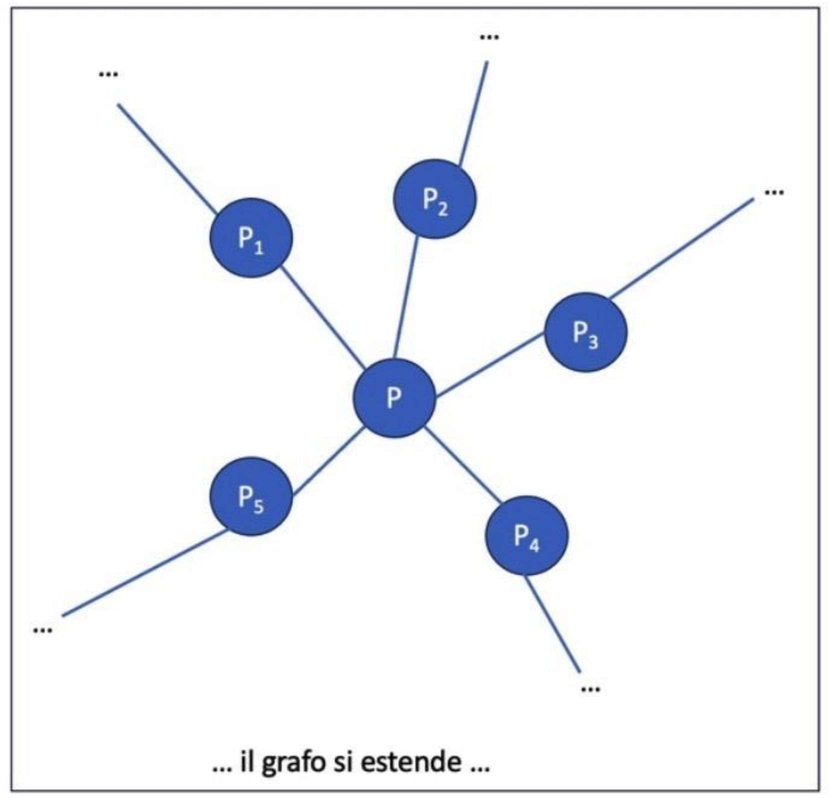
COMBINARE LE TECNICHE

COSA SIGNIFICA COMBNARE LE TECNICHE

ESEMPIO a1

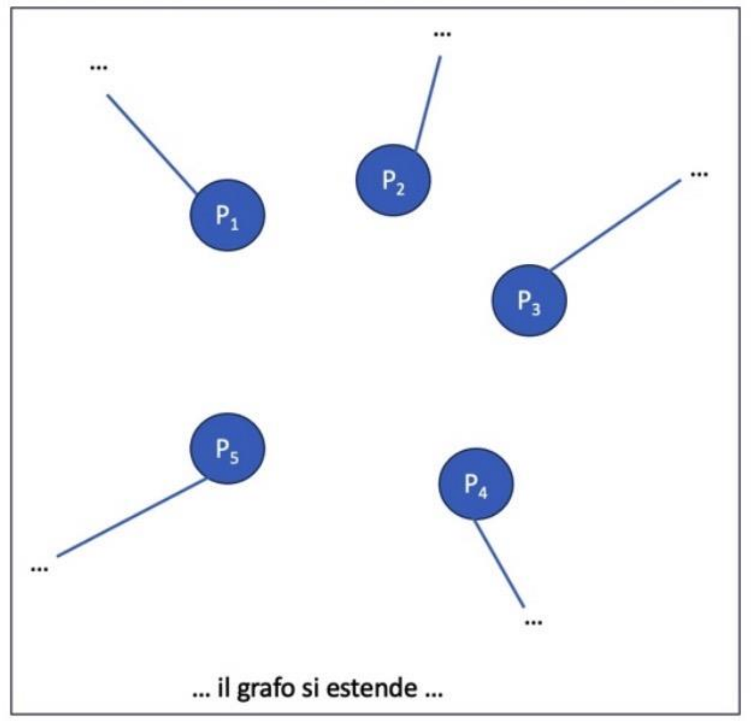
Dimostrare che ogni grafo planare ha un numero cromatico minore o uguale a $\mathbf{6}$.
(una <u>possibile</u> via dimostrativa è per induzione)

Applichiamo alla dimostrazione il principio di induzione.
Indichiamo con $\boldsymbol{G_n}$ *un grafo planare di* $\boldsymbol{n}$ *vertici, e con* $\mathbf{6}-\boldsymbol{col}$ *la proprietà "il grafo ha numero cromatico minore o uguale a* $\mathbf{6}$" .
Passo base: certamente, con 5 nodi, $\boldsymbol{G_5}$ *è* $\mathbf{6}-\boldsymbol{col}$ *in quanto bastano 5 (o meno) colori.*
Passo induttivo: dimostriamo che "$\boldsymbol{G_n}$ *è* $\mathbf{6}-\boldsymbol{col}$*"* $\Longrightarrow$ *"*$\boldsymbol{G_{n+1}}$ *è* $\boldsymbol{col}-\mathbf{6}$*".*
Caso 1: esiste un vertice $\boldsymbol{P}$ *di* $\boldsymbol{G_{n+1}}$ *con* $\boldsymbol{grado\ P} \le \mathbf{5}$.



Dunque $\boldsymbol{P}$ *è collegato con al più altri 5 nodi del grafo planare come nella figura a sinistra.*
Ora togliamo $\boldsymbol{P}$ *e tutti gli archi che lo collegano agli altri nodi.*

Otterremo una situazione tipo quella a destra in figura:



Osserviamo che questo $\boldsymbol{G_n}$ *è un* $\mathbf{6}-\boldsymbol{col}$ *per l'ipotesi induttiva.*

Esempio dalla gara di play off del Distretto di Treviso del 2024

INDUZIONE + ASSURDO ESEMPIO a2

Quindi ora aggiungiamo nuovamente P*; con i sei colori a disposizione posso certamente ancora colorare* P *in modo diverso dai* 5 *nodi a cui lo colleghiamo. Dunque* G_{n+1} *è* $6-\boldsymbol{col}$ *e in questo primo caso l'ipotesi induttiva è dimostrata.*

Caso 2: non esiste vertice P *di* G_{n+1} *con* $\boldsymbol{grado}\ P \leq 5$*. Quindi per* $\forall P_x \in G_{n+1}$ *si ha* $\boldsymbol{grado}\ P_x > 5$ *(quindi grado* 6 *o più). Dunque ogni nodo è adiacente a* 6 *o più archi. Siccome ogni arco (lato, spigolo) è adiacente a* 2 *vertici, il numero dei vertici* $\boldsymbol{V}$ *moltiplicato per* 6 *ci fornisce un limite inferiore al doppio del numero degli archi* $\boldsymbol{L}$*:*

$$2L \geq 6V$$

ovvero:

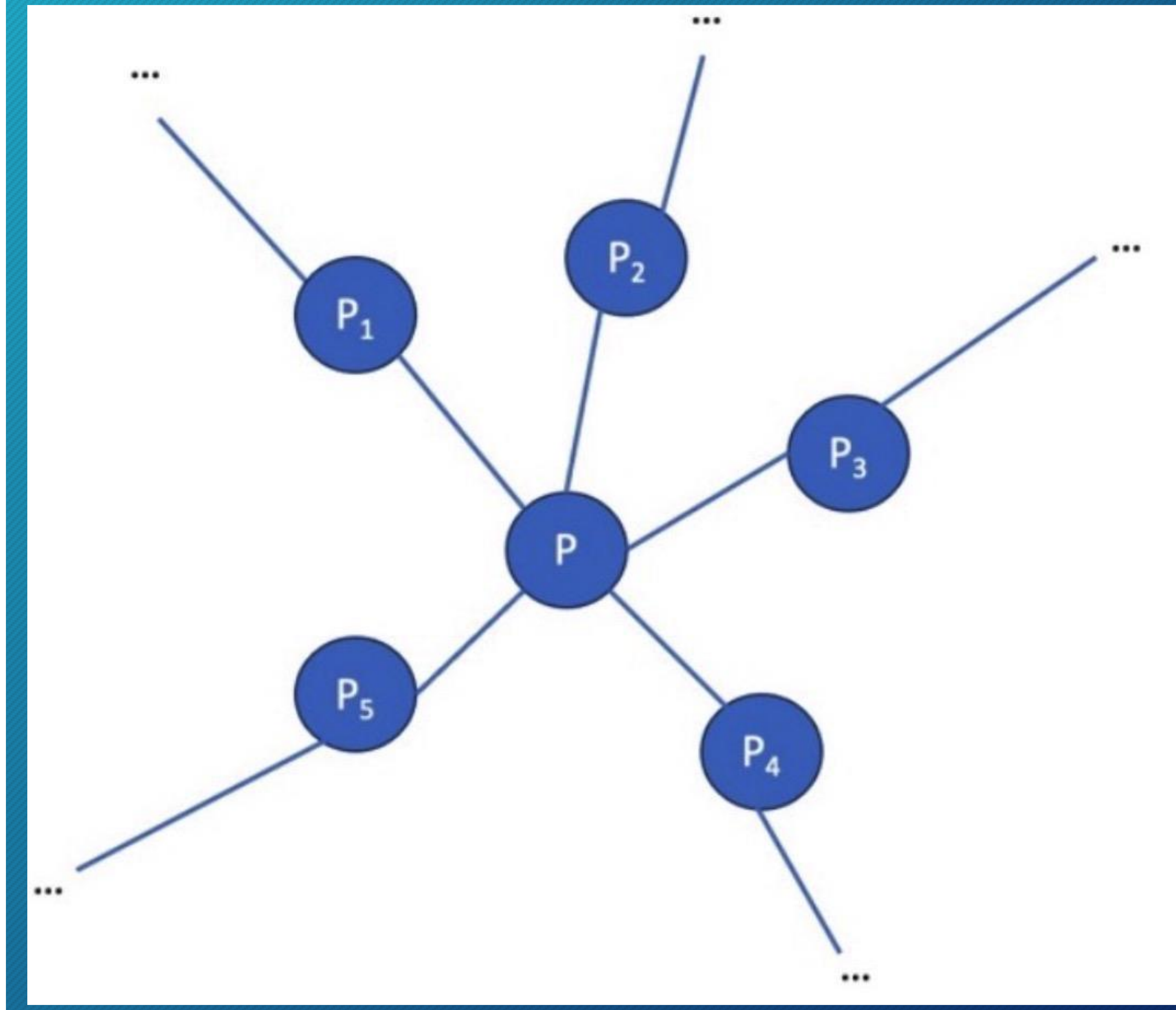
$$L \geq \frac{6 \cdot V}{2}$$

cioè:

$$L \geq 3V$$

Ovvero esiste $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{k} \geq \boldsymbol{0}$ *tale che:*

$$L = 3V + k \qquad (*)$$



INDUZIONE + ASSURDO ESEMPIO a3

Detto $\boldsymbol{F}$ *il numero delle facce del grafo planare (inclusa la faccia esterna al grafo), per la relazione di Eulero* $\boldsymbol{F+V=L+2}$ *applicabile ai grafi planari, risulta:*

$$\boldsymbol{F = L - V + 2 = 3V + k - V + 2 = 2V + k + 2} \qquad (**)$$

Osserviamo che

$$\boldsymbol{3F \leq 2L} \qquad (***)$$

in quanto ogni faccia ha almeno $\boldsymbol{3}$ *lati e* $\boldsymbol{3F}$ *rappresenta il minimo possibile per il numero degli archi che "circondano" le facce, ciascun lato però contato due volte in quanto un lato appartiene sempre a due facce.*

Sostituendo $\boldsymbol{L}$ *dalla (*) e* $\boldsymbol{F}$ *dalla (**) e nella (***):*

$$\boldsymbol{3(2V+k+2) \leq 2(3V+k)}$$

da cui:

$$\boldsymbol{6V+3k+6 \leq 6V+2k}$$
$$\boldsymbol{k \leq -6}$$

il che è assurdo essendo $\boldsymbol{k \in \mathbb{N}, k \geq 0}$.

Pertanto il caso 2 è impossibile e non si può mai verificare.

INDUZIONE + ASSURDO ESEMPIO a4

Cosa abbiamo mescolato nel precedente esempio:

- Dimostrazione per induzione:
  - il passo base è dimostrato per un grafo planare connesso di 5 nodi; la dimostrazione è corretta e funzionale
  - Il passo induttivo è dimostrato diviso in due casi separati:
    - esiste un vertice P con grado minore o uguale a 5; la dimostrazione è corretta e funzionale
    - Non esiste alcun vertice P con grado minore o uguale a 5; la dimostrazione cade in assurdo

Dunque abbiamo opportunamente mescolato due tecniche dimostrative.

IL PRINCIPIO DEI CASSETTI
pigeonhole (=pige on hole)

PIGEONHOLE 1

PRINCIPIO DEL PIGEONHOLE (tratto da Wikipedia)

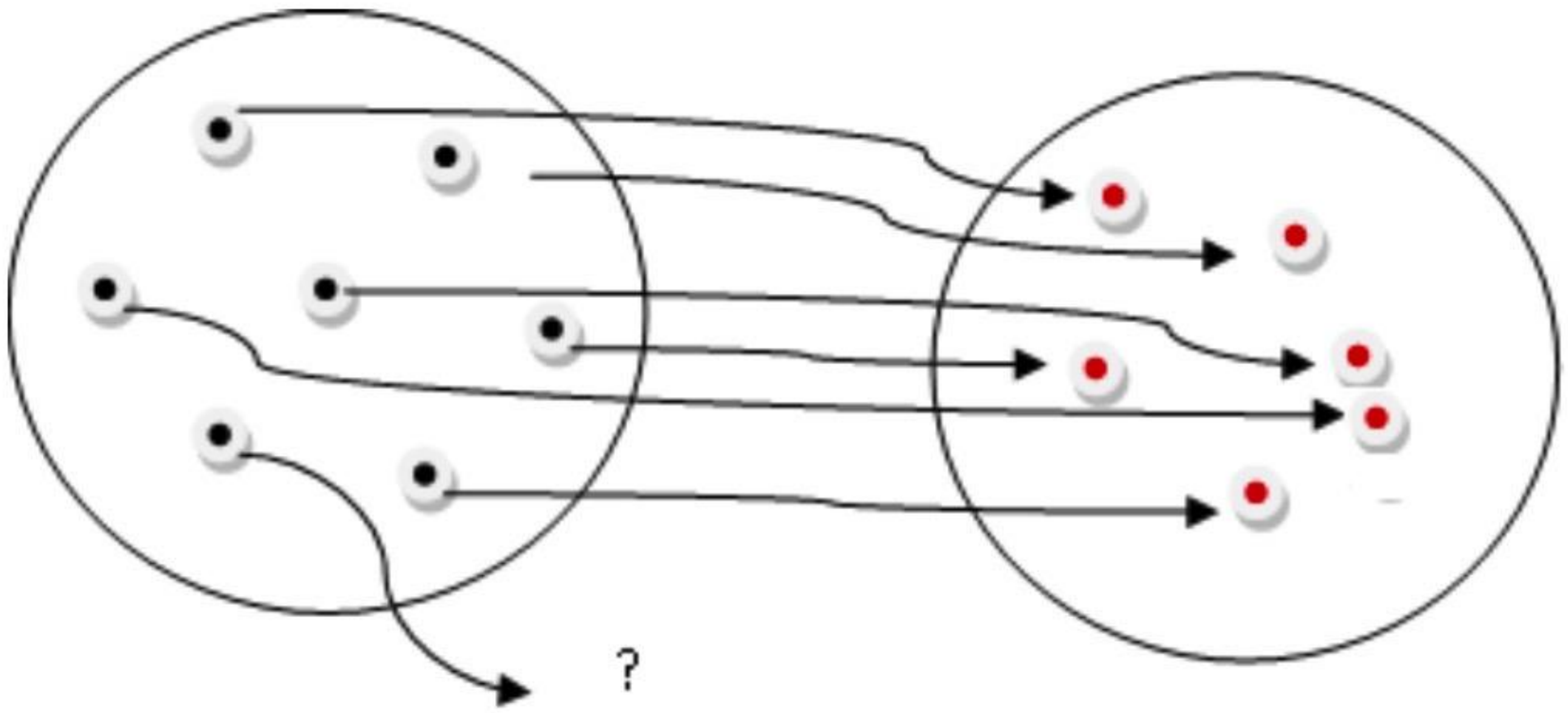
Le forme del principio

Il principio "**pigeonhole**" (letteralmente "il piccione nel buco"), anche conosciuto come principio del cassetto di Dirichlet, afferma che:

*dati due numeri naturali **n** ed **m** con **n>m**, se **n** oggetti sono messi in **m** cassetti, allora **almeno un cassetto deve contenere più di un oggetto**.*

PIGEONHOLE 2

Un'altra maniera di affermare il principio è la seguente: m buchi possono contenere al più m piccioni mettendo un piccione per buco; se tutti i buchi fossero occupati, aggiungere un piccione significherebbe che uno dei buchi dovrebbe essere riutilizzato. Più formalmente, il principio afferma che non esiste una funzione iniettiva avente dominio e codominio finiti, con la cardinalità del codominio minore di quella del dominio:



PIGEONHOLE 3

E’ un metodo di conteggio che può essere applicato a molti problemi formali, includendo quelli relativi agli insiemi finiti che non possono essere posti tra loro in corrispondenza biunivoca. Nell’approssimazione diofantea l’applicazione quantitativa del principio all’esistenza di soluzioni intere di un sistema di equazioni lineari va sotto il nome di Lemma di Siegel.

Si pensa che la prima affermazione del principio sia stata fatta da Dirichlet nel 1834 sotto il nome di “Schubfachprinzip” ("drawer principle" o "shelf principle"). In italiano il nome originale di "principio dei cassetti" è quello tuttora in uso; in alcune altre lingue (per esempio in russo) è chiamato il principio di Dirichlet (da non confondere con il principio minimo per le funzioni armoniche che porta lo stesso nome).

da «Principio dei cassetti e principio di inclusione – esclusione: piccioni in gabbia e problemi matematici (gare di matematica parte 3)», articolo di Lorenzo Mazza da https://www.mathisintheair.org/wp/2021/03/principio-dei-cassetti-e-principio-di-inclusione-esclusione-piccioni-in-gabbia-e-problemi-matematici-gare-di-matematica-parte-3/

PIGEONHOLE ESEMPIO 1

Un semplice esempio è il seguente: cinque persone vogliono giocare a softball ($n = 5$ oggetti), ma ci sono solo quattro squadre di softball ($m = 4$ cassetti). Di per sé non ci sarebbe problema a sistemare le persone, ma c'è il fatto che ognuna delle cinque rifiuta di giocare in una squadra insieme ad una qualsiasi della altre quattro. Per provare che non c'è allora modo di fare giocare tutte e cinque le persone si fa ricorso a questo principio.

da «Principio dei cassetti e principio di inclusione – esclusione: piccioni in gabbia e problemi matematici (gare di matematica parte 3)», articolo di Lorenzo Mazza da https://www.mathisintheair.org/wp/2021/03/principio-dei-cassetti-e-principio-di-inclusione-esclusione-piccioni-in-gabbia-e-problemi-matematici-gare-di-matematica-parte-3/

PIGEONHOLE ESEMPIO 2

Se ci sono n persone (con n>1) che possono scambiare una stretta di mano con altre persone, ci sono sempre un paio di persone che stringono le mani dello stesso numero di persone. Qui, il buco corrisponde al numero di strette di mano. Ogni persona può stringere le mani di persone da 1 a n-1. Questo crea n-1 possibili buchi perché sia il buco ‘0’ sia il buco ‘n’ devono essere vuoti (una persona non può non stringere mani né può stringerla a n perché non può stringersi la mano da solo). Quindi le persone devono riempire i buchi numerati da 1 a n-1. Questo lascia n persone che devono essere poste in al massimo n-1 buchi non vuoti, garantendo così la duplicazione.

da «Principio dei cassetti e principio di inclusione – esclusione: piccioni in gabbia e problemi matematici (gare di matematica parte 3)», articolo di Lorenzo Mazza da https://www.mathisintheair.org/wp/2021/03/principio-dei-cassetti-e-principio-di-inclusione-esclusione-piccioni-in-gabbia-e-problemi-matematici-gare-di-matematica-parte-3/

PIGEONHOLE ESEMPIO 3

Sebbene il principio del pigeonhole possa sembrare intuitivo, può essere usato per dimostrare possibili risultati inaspettati. Per esempio, ci devono essere almeno due persone a Londra con lo stesso numero di capelli sulla testa. Una testa tipica ha circa 150.000 capelli; è ragionevole assumere che nessuno abbia sulla propria testa più di 1.000.000 di capelli (m = 1.000.000 numero capelli = numero buchi). Ci sono più di 1.000.000 di persone a Londra, supponiamo siano n (n = numero persone = numero oggetti, maggiore di 1.000.000). Se assegniamo un buco per ogni numero di capelli sulla testa ed assegniamo la persona con quel numero di capelli sulla testa a quel buco, poiché le persone sono più dei buchi, ci saranno più persone con quel numero di capelli sulla testa.

da «Principio dei cassetti e principio di inclusione – esclusione: piccioni in gabbia e problemi matematici (gare di matematica parte 3)», articolo di Lorenzo Mazza da https://www.mathisintheair.org/wp/2021/03/principio-dei-cassetti-e-principio-di-inclusione-esclusione-piccioni-in-gabbia-e-problemi-matematici-gare-di-matematica-parte-3/

PIGEONHOLE ESEMPIO 4

In un baule ci sono 10 paia di calzini di colori diversi e 10 paia di guanti degli stessi colori dei calzini. C'è buio e non si vede nulla, e non riesco a distinguere calzini e guanti. Quanti oggetti devo tirar fuori per essere sicuro di avere un set coordinato di guanti e calzini?

Soluzione: nel baule ci sono in totale 40 oggetti (10 paia di calzini e 10 paia di guanti). Se tiro fuori 30 oggetti, è possibile che abbia preso 3 oggetti per ciascun colore. Mi basta allora estrarre un ulteriore oggetto per essere certo di avere un set coordinato di guanti e calzini dello stesso colore.

da «Principio dei cassetti e principio di inclusione – esclusione: piccioni in gabbia e problemi matematici (gare di matematica parte 3)», articolo di Lorenzo Mazza da https://www.mathisintheair.org/wp/2021/03/principio-dei-cassetti-e-principio-di-inclusione-esclusione-piccioni-in-gabbia-e-problemi-matematici-gare-di-matematica-parte-3/

PIGEONHOLE ESEMPIO 5

Alle elezioni comunali del paese di Vattelapesca, si presentano come aspiranti sindaci tre persone. Sapendo che gli aventi diritto al voto sono 2.380 persone e tutte quante si sono recate a votare, qual è il numero minimo di voti che deve ottenere un candidato per poter sperare di vincere?

Soluzione: per il principio dei cassetti, ci sarà almeno un candidato che avrà ottenuto $\lceil \frac{2380}{3} \rceil = 794$ voti. Tale valore è anche il numero cercato (infatti potrebbe accadere che gli altri due sfidanti hanno ottenuto ciascuno 793 voti, con 793+793+794=2.380).

da «Principio dei cassetti e principio di inclusione – esclusione: piccioni in gabbia e problemi matematici (gare di matematica parte 3)», articolo di Lorenzo Mazza da https://www.mathisintheair.org/wp/2021/03/principio-dei-cassetti-e-principio-di-inclusione-esclusione-piccioni-in-gabbia-e-problemi-matematici-gare-di-matematica-parte-3/

PIGEONHOLE ESEMPIO 6

Consideriamo l'intera popolazione italiana (che approssimiamo per semplicità a 60 milioni di abitanti), divisa fra maschi e femmine, e supponiamo che non ci sia nessuno che abbia 10 o più figli. Dimostrare che esistono almeno 13 persone dello stesso sesso, con lo stesso numero di figli, lo stesso compleanno e le stesse prime due lettere del nome.

Soluzione: si tratta anche questa volta di applicare il principio dei cassetti sapendo che $\lceil \frac{6 \cdot 10^7}{2 \cdot 10 \cdot 26^2 \cdot 366} \rceil = 13$. Osserviamo che in questo esercizio (e in quelli che seguiranno) si suppone di utilizzare tutte le lettere possibili dell'alfabeto (dunque 26 lettere).

da «Principio dei cassetti e principio di inclusione – esclusione: piccioni in gabbia e problemi matematici (gare di matematica parte 3)», articolo di Lorenzo Mazza da https://www.mathisintheair.org/wp/2021/03/principio-dei-cassetti-e-principio-di-inclusione-esclusione-piccioni-in-gabbia-e-problemi-matematici-gare-di-matematica-parte-3/

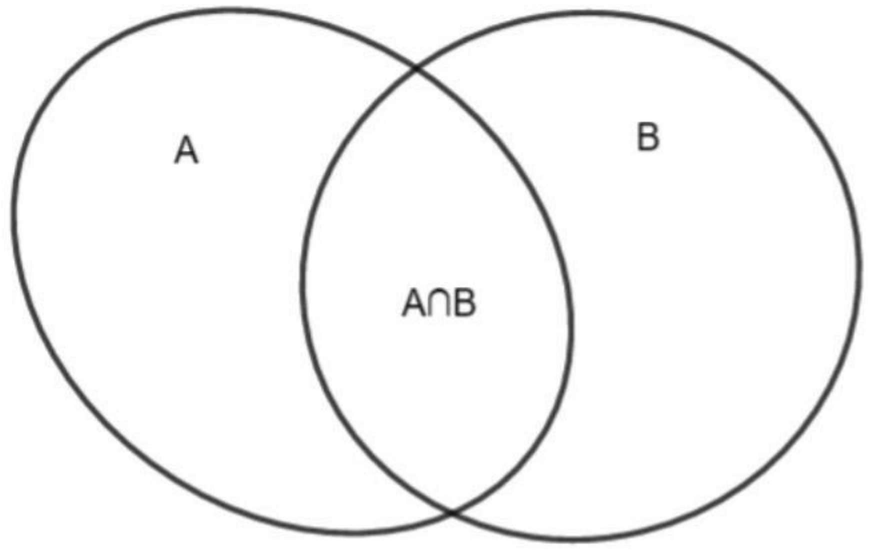
CONTEGGIO COMPLEMENTARE complementary counting

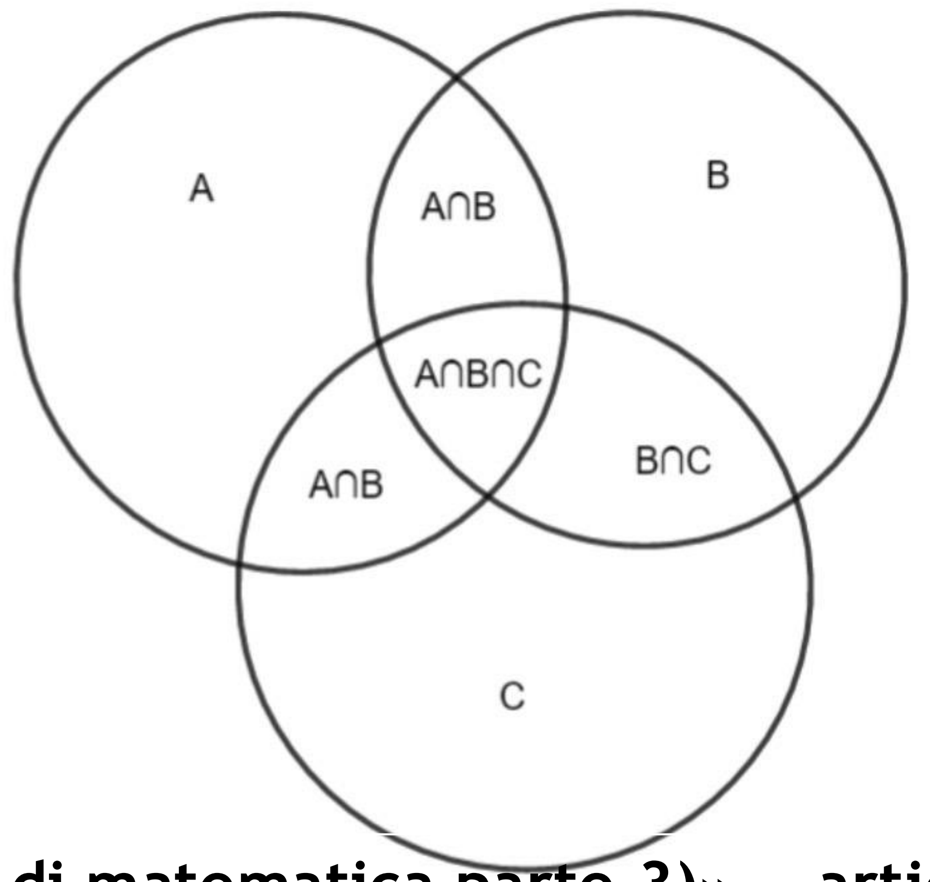
Un’altra tecnica piuttosto frequente è quella del ***complementary counting***, cioè si vanno a contare tutti i casi non richiesti (il complementare) per poi sottrarli al numero totale di casi. Ad esempio, se volessi conoscere tutte le parole lunghe 5 lettere con almeno una A, possiamo sottrarre il numero di parole che non contengono la A (25^5) al numero totale di parole con 5 lettere (26^5).

CONTEGGIO COMPLEMENTARE 2
PIE

Tra le tecniche di conteggio più note troviamo anche il **principio di inclusione – esclusione** (abbreviato con PIE). Si tratta di un'identità che mette in relazione la cardinalità di un insieme (espresso come l'unione di più insiemi finiti) con le cardinalità delle intersezioni di tali insiemi. Ad esempio, nel caso di due soli insiemi, il PIE afferma che $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Questo perché se prendo tutti gli elementi di A e tutti gli elementi di B, gli elementi comuni ad A e B (cioè gli elementi di $A \cap B$) verrebbero contati due volte. Nel caso di tre insiemi, si ottiene $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$. In generale, dati n insiemi finiti $A_1, A_2, \ldots, A_n$, il PIE si esprime come $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| +$

$\sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots (-1)^{n-1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n|$.





da «Principio dei cassetti e principio di inclusione – esclusione: piccioni in gabbia e problemi matematici (gare di matematica parte 3)», articolo di Lorenzo Mazza da https://www.mathisintheair.org/wp/2021/03/principio-dei-cassetti-e-principio-di-inclusione-esclusione-piccioni-in-gabbia-e-problemi-matematici-gare-di-matematica-parte-3/

CONTEGGIO COMPLEMENTARE esempio 1

Sia A l'insieme dei multipli di 6 compresi tra 110 e 350 e sia B l'insieme dei multipli di 4 compresi anch'essi fra 110 e 350. Quanti sono i numeri presenti in $A \cup B$? E quanto vale la somma di tali numeri?

Soluzione: il primo e ultimo termine di A sono 114 e 348 (rispettivamente il più piccolo e il più grande multiplo di 6 compresi nell'intervallo considerato). Dunque $|A| = \frac{348-(114-6)}{6} = 40$. Il primo e l'ultimo termine di B sono 112 e 348, da cui $|B| = \frac{348-(112-4)}{4} = 60$. Infine gli elementi che appartengono sia ad A che a B sono gli elementi multipli del $m.c.m.(6,4) = 12$, e nell'intervallo considerato il più piccolo e il più grande sono rispettivamente 120 e 348, da cui $|A \cap B| = \frac{348-(120-12)}{12} = 20$. Ne consegue che $|A \cup B| = 40 + 60 - 20 = 80$. Per rispondere alla seconda domanda, bisogna tenere presente che la somma di tutti i numeri multipli di 6 è pari a $\frac{(114+348)\cdot 40}{2} = 9240$, la somma di tutti i numeri multipli di 4 è pari a $\frac{(112+348)\cdot 60}{2} = 13800$ e la somma di tutti i multipli di 12 è pari a $\frac{(120+348)\cdot 20}{2} = 4680$. Ne consegue che la somma richiesta è pari a $9240 + 13800 - 4680 = 18360$.

N.B.: per il calcolo della somma degli elementi di A, di B e di $A \cap B$ si è fatto uso della relazione $S = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$, facilmente dimostrabile nell'ambito dello studio delle progressioni aritmetiche

da «Principio dei cassetti e principio di inclusione - esclusione: piccioni in gabbia e problemi matematici (gare di matematica parte 3)», articolo di Lorenzo Mazza da https://www.mathisintheair.org/wp/2021/03/principio-dei-cassetti-e-principio-di-inclusione-esclusione-piccioni-in-gabbia-e-problemi-matematici-gare-di-matematica-parte-3/

CONTEGGIO COMPLEMENTARE esempio 2

Quante parole di 3 lettere non contengono la stessa lettera due volte di seguito?

Soluzione: il numero totale di parole di 3 lettere è pari a 26^3. Contiamo in quanti modi le parole hanno almeno due lettere di seguito. Potrebbe accadere che le due lettere uguali occupano la prima e seconda posizione, per un totale di 26^2 modi (infatti la prima coppia di lettere la posso scegliere in 26 modi, la terza lettera nuovamente in 26 modi); stesso conto nel caso in cui la coppia di lettere uguali occupano la seconda e terza posizione. Invece le parole in cui tutte e 3 le lettere sono uguali sono 26. Dunque la risposta cercata è data da $26^3 - 26^2 - 26^2 + 26 = 16.250$.

da «Principio dei cassetti e principio di inclusione – esclusione: piccioni in gabbia e problemi matematici (gare di matematica parte 3)», articolo di Lorenzo Mazza da https://www.mathisintheair.org/wp/2021/03/principio-dei-cassetti-e-principio-di-inclusione-esclusione-piccioni-in-gabbia-e-problemi-matematici-gare-di-matematica-parte-3/

DIMOSTRAZIONI
GLI SCHEMI DI RAGIONAMENTO

SCHEMI DI RAGIONAMENTO 1

- Le definizioni sono frasi con le quali si dà il nome a un ente, cioè un «oggetto» della teoria, e se ne precisa il significato facendo riferimento ad altri oggetti già definiti o a enti primitivi, ossia oggetti che non vengono definiti, ma vengono accettati come noti.

- Le proposizioni che esprimono relazioni tra gli enti e che sono poste a fondamento della teoria vengono dette assiomi o postulati.

- Dagli assiomi, mediante procedimenti detti dimostrazioni, è possibile ricavare altre proposizioni, dette teoremi, che esprimono proprietà e relazioni fra gli enti della teoria. Un teorema lega alcune proposizioni di partenza date, dette ipotesi, e una proposizione finale, detta tesi. Le dimostrazioni preservano la verità; il che vuol dire che, se le ipotesi di un teorema e gli assiomi sono veri, tale è anche la tesi che si ottiene da essi mediante dimostrazione.

ESEMPIO

NELLA GEOMETRIA RAZIONALE DEL PIANO:

- **ENTI PRIMITIVI**: PUNTO E RETTA
- **ASSIOMA**: «PER DUE PUNTI DISTINTI PASSA UNA E UNA SOLA RETTA»
- **TOREMA**: «UN TRIANGOLO AVENTE UNA COPPIA DI ANGOLI CONGRUENTI E' ISOSCELE»

SCHEMI DI RAGIONAMENTO 2

Le deduzioni, ossia i singoli passi di una dimostrazione, sono organizzate con precise regole logiche che chiamiamo **schemi di ragionamento**.
In termini più precisi, possiamo dire che, in una teoria T, una dimostrazione della tesi t, che parte dalle ipotesi h 1 , h 2 , h 3 , ..., è una sequenza finita e ordinata di proposizioni che termina con la tesi t e tale che ogni proposizione soddisfa una delle seguenti condizioni:

1. è un assioma di T;
2. è un'ipotesi;
3. è un teorema già dimostrato;
4. è dedotta da uno degli enunciati precedenti mediante regole logiche.

1 - ragionamento per assurdo

Lo schema del ragionamento **per assurdo** è:

$$\frac{\begin{array}{c}(h \land \neg t) \to p \\ (h \land \neg t) \to \neg p\end{array}}{h \to t}$$

Abbiamo utilizzato il linguaggio simbolico della logica proposizionale, indicando con:
- h l'ipotesi (o le ipotesi),
- t la tesi
- p una proposizione generica

Abbiamo poi usato i connettivi: $\land$ congiunzione, $\neg$ negazione, $\to$ implicazione.

La prima riga si legge così: «h e non t implica p» o, in termini equivalenti, «se h e non t, allora p». La seconda: «h e non t implica non p» o, in termini equivalenti, «se h e non t, allora non p».

Sopra la riga orizzontale ci sono le premesse del ragionamento e sotto di essa la conclusione.

Lo schema afferma che per dimostrare la tesi t dall'ipotesi h, è sufficiente verificare che, aggiungendo all'ipotesi h la negazione «non t» della tesi, si ottiene sia la proposizione p, sia la sua negazione «non p», ossia una contraddizione.

2 – modus ponens

Lo schema del ragionamento del **modus ponens** è:

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \end{array}}{q}$$

Abbiamo utilizzato il linguaggio simbolico della logica proposizionale, indicando con:
- p l'ipotesi (es. un triangolo è isoscele)
- q la tesi (es. gli angoli alla base del triangolo sono congruenti).

Abbiamo poi usato il connettivo: → implicazione.

Consideriamo l'implicazione p → q: «Se un triangolo è isoscele, allora gli angoli alla base del triangolo sono congruenti» che contiene le proposizioni semplici: p: «Un triangolo è isoscele» q: «Gli angoli alla base del triangolo sono congruenti».

Questo schema di ragionamento è detto modus ponens:
assumiamo vera p e dimostriamo p → q; lo schema di ragionamento ci garantisce che possiamo assumere anche q vera.

3 – regola della contronominale

Lo schema del ragionamento del **modus ponens** può anche basarsi sulla «**regola della contronominale**»:

$$\frac{\neg q \rightarrow \neg p}{p \rightarrow q}$$

Consideriamo la proposizione:

a = «Se il quadrato di un numero naturale è pari, allora il numero è pari»,

Ovvero

a = «$p \rightarrow q$»

essendo

p = «il quadrato di un numero naturale è pari»

e

q = « il numero è pari »

Per dimostrarla possiamo procedere considerando un qualunque numero non pari, ossia dispari, che in simboli può essere espresso con $2n + 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Elevandolo al quadrato, otteniamo: $(2n + 1) = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$, che è ancora un numero dispari.

Abbiamo quindi dimostrato un’altra proposizione, diversa da a, ovvero:

b = «Se un numero è dispari, allora il suo quadrato è dispari».

b è detta contronominale di a.

a è nella forma «se p allora q», mentre b è nella forma «se non q allora non p».

La regola logica della contronominale garantisce che dimostrare b equivale a dimostrare a.

4 – modus tollens

Lo schema del ragionamento del **modus tollens** è:

$$\begin{array}{c} p \to q \\ \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$$

Consideriamo ancora l'implicazione:

«p → q» = «Se un triangolo è isoscele, allora gli angoli alla base sono congruenti»

con

p =«un triangolo è isoscele»

e

q = «gli angoli alla base sono congruenti».

Se insieme a «p → q» assumiamo come ipotesi:

¬ q = «gli angoli interni del triangolo ABC sono a due a due non congruenti»

allora possiamo affermare la tesi:

¬ q = «ABC non è isoscele».

assumiamo vera ¬ q e dimostriamo che p → q; lo schema di ragionamento ci dice che possiamo assumere anche q vera.

Questo schema di ragionamento è detto **modus tollens**; è la famosa dimostrazione che inizia con «Supponiamo che, per assurdo, la tesi sia falsa» e finisce con « Allora è falsa anche l'ipotesi», il che è assurdo perché la abbiamo assunta vera. E' simile alla dimostrazione per assurdo, ma più semplice perché non si avvale di una terza proposizione da affermare e contraddire.

5 –validità degli schemi di ragionamento

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_n \\ \hline c \end{array}$$

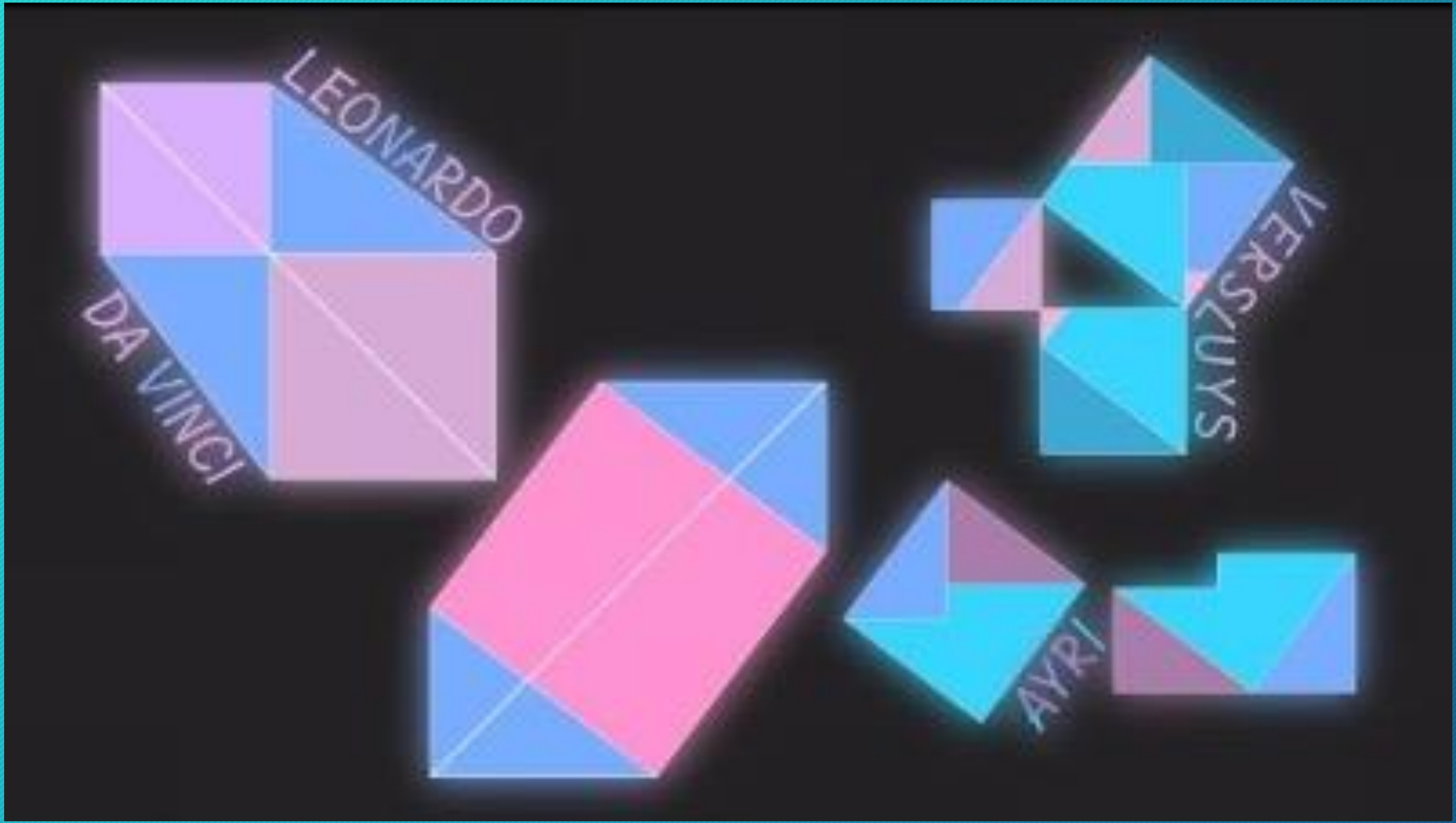
Gli esempi di schemi di ragionamento che abbiamo preso in considerazione nelle slide precedenti suggeriscono che ogni regola logica si caratterizza come una relazione tra proposizioni, le premesse $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e la conclusione c, rappresentabile nella forma seguente.

Una sequenza di proposizioni:

$$\frac{p_1, p_2, \ldots, p_n}{c}$$

è uno schema di ragionamento valido se e solo se tutte le volte in cui le premesse $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sono vere, anche la conclusione c è vera, garantendo quindi il mantenimento della verità dalle premesse alle conclusioni. Quelli presentati sono tutti schemi di ragionamento validi. Omettiamo la dimostrazione in questa sede.

E PER FINIRE …



COSA PENSIAMO DELLE DIMOSTRAZIONI GRAFICHE?

Da https://www.youtube.com/watch?v=pbxQ1lmIsn4

ABBIAMO VISTO

- Dimostrazioni dirette di implicazioni (se … allora …)
- Dimostrazioni dirette di coimplicazioni (… se e solo se …)
- Dimostrazioni per assurdo
- Dimostrazioni per induzione (anche estesa o con discesa infinita)
- Combinazioni di multiple metodologie dimostrative
- Dimostrazioni che sfruttano il principio dei cassetti o del complementary counting
- Schemi di ragionamento validi utilizzati per le varie dimostrazioni

GRAZIE PER L'ATTENZIONE

ORIETTA ZANGIACOMI

ex Coordinatore Distrettuale delle Olimpiadi della Matematica del Distretto di Treviso
docente emerita di Matematica del Liceo Scientifico Statale Leonardo da Vinci di Treviso

oriettazangiacomi @ gmail.com